

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

В. И. Потапов

**ПРОТИВОБОРСТВО ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ:
МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ**

Монография

Омск
Издательство ОмГТУ
2015

УДК 004.94:519.711.3

ББК 32.97+22.1

П64

Рецензенты:

А. А. Колоколов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

В. И. Трушляков, д-р техн. наук, профессор

Потапов, В. И.

П64 Противоборство технических систем в конфликтных ситуациях: модели и алгоритмы : монография / В. И. Потапов ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2015. – 168 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-1993-9

В монографии с позиций системного анализа и на основе численных методов рассмотрен круг задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях.

Приводятся математические модели и алгоритмы для численного решения оптимизационных задач противоборства технических систем в условиях конфликта, начиная с простейших с восстановлением отказавших в процессе противоборства компонентов системы и с динамическим перераспределением средств защиты в процессе конфликта и кончая задачами оптимального управления подвижными техническими объектами в процессе противоборства с неподвижными и подвижными объектами.

Предназначена для научных работников, аспирантов и магистрантов, занимающихся изучением и использованием на практике математических моделей и алгоритмов оптимального управления противоборствующими техническими системами в конфликтных ситуациях.

УДК 004.94:519.711.3

ББК 32.97+22.1

*Печатается по решению научно-технического совета
Омского государственного технического университета.
Протокол № 13 от 07.04.2015 года.*

ISBN 978-5-8149-1993-9

© ОмГТУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
 1. Математические модели и алгоритмы для решения простейших задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях.....	 16
1.1. Математическая модель технической системы, участвующей в конфликтной ситуации	16
1.2. Постановка задачи оптимизации надежности технической противоборствующей $S(n, m, \bar{s})$ -системы в конфликтной ситуации	19
1.3. Решение задачи оптимизации вероятности безотказной работы противоборствующей системы $S(n, m, \bar{s})$ в конфликтной ситуации	25
1.4. Решение задачи оптимизации среднего времени безотказной работы противоборствующей системы $S(n, m, \bar{s})$ в конфликтной ситуации	28
1.5. Решение задач нахождения минимального ресурса средств защиты атакуемой системы $S(n, m, \bar{s})$, гарантирующего надежность ее работы не ниже заданной	30
1.5.1. Задача 1	31
1.5.2. Задача 2	33
 2. Математические модели и алгоритмы для решения оптимизационных задач противоборства технических систем с восстановлением отказавших блоков и с динамическим распределением средств защиты в процессе конфликта	 35
2.1. Математическая модель и постановка задачи оптимального восстановления после отказов атакуемой технической системы $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ в конфликтной ситуации	36

2.2. Решение задачи оптимального восстановления отказавших блоков атакуемой в конфликтной ситуации $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ - системы	39
2.3. Алгоритм численного решения задачи оптимизации восстановления технической $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ - системы после отказов	45
2.4. Аналитическое решение задачи нахождения класса функций интенсивностей восстановления $\mu(t)$, гарантирующих атакуемой восстанавливаемой технической системе работоспособное состояние при заданной интенсивности отказов $\lambda(t)$	48
2.5. Оптимизация функциональной надежности атакуемой $S_D(n, m, \bar{s})$ - системы с динамическим резервированием в процессе конфликта	54
2.5.1. Первая задача оптимизации надежности $S_D(n, m, \bar{s})$ - системы с динамическим резервированием	55
2.5.2. Вторая задача оптимизации надежности $S_D(n, m, \bar{s})$ - системы с динамическим резервированием	57
3. Математическая модель и алгоритм численного решения задачи противоборства двух избыточных, восстанавливаемых после отказов технических систем в конфликтной ситуации	61
3.1. Математическая модель противоборствующих систем	61
3.2. Постановка задачи противоборства двух S^g -систем	63
3.3. Решение задачи противоборства двух S^g -систем	68
3.4. Численный алгоритм решение задачи противоборства двух S^g - систем	74

4. Конфликты и противоборство подвижных технических систем	77
4.1. Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижной системой, управляемой по каналам связи	78
4.1.1. Формализация объекта исследования и постановка задачи	79
4.1.2. Решение поставленной задачи	82
4.1.3. Алгоритм численного решения задачи	93
4.2. Противоборство (дифференциальная игра) между подвижными и неподвижными объектами	96
4.3. Противоборство (дифференциальная игра) между подвижными управляемыми объектами	104
 5. Математические модели и задачи для оценки функциональной готовности технической системы к противоборству в конфликтной ситуации и продолжению противоборства после отказов компонентов системы.....	110
5.1. Модели для вычисления функциональной готовности технической системы при подготовке ее к противоборству в конфликтной ситуации и при восстановлении работоспособности после отказов компонентов в процессе противоборства при абсолютной надежности системы подготовки и восстановления	112
5.1.1. Решение задачи при отсутствии помех со стороны противника	112
5.1.2. Решение задачи при наличии помех со стороны противника	114

5.2. Модели для вычисления функциональной готовности технической системы при подготовке ее к противоборству в конфликтной ситуации и при восстановлении работоспособности после отказов компонентов в процессе противоборства при конечной надежности системы подготовки и восстановления с учетом надежности человека-оператора	121
5.2.1. Первая математическая модель	123
5.2.2. Вторая математическая модель	125
5.2.3. Третья математическая модель	127
Заключение.....	132
Библиографический список.....	135
Приложение. Программный комплекс для решения игровых задач противоборства двух игроков, располагающих подвижными и неподвижными техническими объектами, и для игроков, располагающих подвижными управляемыми объектами	142

*Победителям в Великом противоборстве
двух систем 1941–1945 гг. посвящается*

ВВЕДЕНИЕ

Конфликтные ситуации обычно возникают тогда, когда сталкиваются интересы двух или более враждующих сторон, преследующих различные цели, и между ними происходит противоборство за достижение собственных целей вопреки враждебным действиям противоборствующей стороны. Подобные ситуации чаще всего имеют место в военном деле, в технических, информационных и вычислительных системах, в бизнесе и в области экономики, да и другие области деятельности не являются исключением.

Особое место среди конфликтных ситуаций занимают такие ситуации, в которых конфликтующая сторона (система любой природы) может целенаправленно подвергаться атакам, преследующим цель дестабилизировать работу находящейся в конфликте системы путем уменьшения ее надежности. Известным приемом борьбы с такой дестабилизацией, то есть повышением надежности и отказоустойчивости работы любой системы, является введение в эту систему и активное использование в процессе конфликта различного вида избыточности, включая аппаратную, логическую, информационную, временную [1–3]. Следовательно, в реальных условиях для успешного участия в конфликтной ситуации защищаемая система должна обладать опреде-

ленным ресурсом для собственной защиты, а нападающая система – ресурсом нападения на противника. При этом успешность действий в конфликтной ситуации нападающей и защищающейся сторон будет определяться выбранной стратегией использования имеющегося ресурса для нападения и/или защиты. В сложных конфликтных ситуациях, связанных с противоборством конфликтующих систем, каждая из сторон конфликта может обладать как ресурсом для защиты, так и ресурсом для нападения [4, 5]. Как показал опыт ряда авторов научных работ, решение таких задач, связанных с выбором стратегии взаимодействия и оптимизации надежности функционирования противоборствующих систем за счет имеющегося у них ресурса избыточности, в конфликтных ситуациях удобно проводить с использованием аппарата математической теории игр [6–10]. Так, например, в работе [9] решается задача выбора оптимального момента включения резервного элемента, а в [10] рассматриваются вопросы применения теоретико-игровых моделей и методов к синтезу сложных технических систем, включая модели «живучести» таких систем в конфликтных ситуациях. В работе [7] поставлены и решены задачи отыскания оптимальных (или близких к оптимальным) стратегий резервирования и восстановления отказавших нейронных блоков для многовыходной структурно однородной адаптивной к отказам нейронов искусственной нейронной сети в условиях антагонистической игры.

По целому ряду причин в настоящее время не менее важной областью исследования являются так называемые игры с «природой», в которых атакующий противник («природа») не стремится причинять максимальный вред обороняющейся стороне, а

действует случайным образом. Использование в игре с «природой» стратегий, определенных в предположении заинтересованности обеих сторон в получении максимального выигрыша (минимального проигрыша), неэффективно, поскольку такие стратегии соответствуют принятию решений в условиях крайнего пессимизма в оценке действий «природы». Следовательно, игра с «природой» является одной из разновидностей игр с неполной информацией [10]. В данной работе численными методами решается задача о выборе стратегии резервирования аппаратно-избыточной системы в условиях игры с «природой». Очевидно, что в общем случае такая игра описывается дифференциальной моделью, однако, учитывая ограничения на управления игроков, в том числе особенности технической реализации распределения резервных элементов в рассматриваемой системе, дифференциальная игра сводится к многошаговой матричной игре, которую удобно решать с использованием персональных ЭВМ.

Учитывая теоретическое и особенно практическое значение в настоящее время большое внимание в данной книге уделяется разработке моделей и алгоритмов численного решения задач противоборства в конфликтных ситуациях избыточных, восстанавливаемых после отказов технических систем. Одной из таких важных на практике задач, рассматриваемых в работе, является задача, где в качестве конфликтующих сторон описываются две идентичные по структуре избыточные технические системы, содержащие основные и резервные компоненты (блоки), подключаемые вместо отказавших основных, для восстановления функциональных возможностей соответствующей системы, участвующей в противоборстве. Каждая из участвующих в конфликте

сторон в процессе противоборства систем стремится ослабить противоборствующую систему, уменьшая вероятность и время ее безотказной работы, путем целенаправленного воздействия (атакам) на ее компоненты, увеличивая интенсивность их отказов в течение времени взаимодействия. В задачу каждой из противоборствующих сторон входит выбор оптимальной стратегии поведения в конфликтной ситуации с целью максимизации соответствующей функции выигрыша за счет оптимального использования резервных компонентов.

Данная задача сведена к матричной игре в смешанных стратегиях и для ее решения применен метод фиктивного разыгрывания [18], который по существу является имитацией многократного повторения игры.

Задачи, связанные с разработкой математических моделей и алгоритмов оптимального управления в конфликтных ситуациях, подвижными объектами, управляемыми по каналам связи, в силу целого ряда объективных причин приобрели в настоящее время также важное научное и практическое значение.

По-видимому, одной из первых научных публикаций, прямо относящейся к проблемам оптимального управления подвижными объектами в конфликтной ситуации, является работа [11], в которой автор предложил метод направленной оптимизации вектора начальных координат в одной частной модели конфликта подвижных объектов, технические характеристики которых ухудшались в результате конфликтного взаимодействия с объектами противника и приводили к старению системы, что, естественно, увеличивало вероятность отказа этой системы. В более общей постановке вопросы оптимального управления

конфликтующими подвижными объектами изучаются в работе [12], где рассмотрены достаточно сложные модели конфликта подвижных объектов, в которых на надежность объекта влияет не только взаимодействие противостоящего подвижного объекта, но и воздействие изменяющихся пространственных факторов, таких как физико-географические особенности пространства, радиационная обстановка и другие.

В указанных выше работах основное внимание уделено постановке задач и разработке математических методов и моделей оптимизации управления подвижными конфликтующими объектами, при этом, к сожалению, алгоритмы для численного решения сформулированных задач в этих работах не рассматриваются, что существенно затрудняет использование полученных математических результатов на практике. К тому же, в разработанных моделях не уделено должного внимания управляющим устройствам конфликтующих подвижных объектов, надежность которых существенно влияет на вероятность безотказной работы в целом.

Большой класс задач, связанный с конфликтными ситуациями подвижных объектов, типа «преследование», «сближение», «убегание» и другие, относится к классу динамических дифференциальных игр [13–15]. Обычно методы дифференциальных игр используют при решении задач прикладного плана, имеющих игровой характер, которые не укладываются (или плохо укладываются) в рамки сформировавшейся теории оптимального управления [16]. К числу таких дифференциальных игровых задач, наиболее близких к рассматриваемым проблемам в данной работе, относятся задачи управления подвижными системами с

переменной структурой с разрывными траекториями и подвижными системами с импульсным управлением в дискретные моменты времени с помощью управляющего устройства. В каждом из режимов работы динамика подвижной системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а переключение между режимами функционирования происходит скачкообразно в дискретные моменты времени [14]. Однако в работах [13–15], так же как в работах [11, 12], решение дифференциальных игровых задач не доведено до численных методов решения с помощью средств вычислительной техники, что при всей научной значимости, безусловно, снижает практическую ценность полученных результатов.

При этом в указанных выше работах при разработке моделей поведения подвижных объектов в конфликтной ситуации практически не учитывается физическая структура подвижного объекта, включающая основные и резервные компоненты, что характерно для современных подвижных объектов, и методы самозащиты объекта в процессе конфликта.

В предлагаемой читателю книге сделана попытка в какой-то мере восполнить указанный выше пробел и дать практически реализуемый на компьютере численный алгоритм оптимального управления самозащищающимся подвижным объектам в конфликтной ситуации, обеспечивающего максимизацию вероятности безотказной работы этих объектов.

Достаточно сложными в этом отношении являются задачи, когда подвижный объект, участвующий в конфликтной ситуации, в течение времени конфликта и положения в пространстве должен защищаться за счет собственных ресурсов – средств за-

щиты (как правило – избыточности) от воздействия другой из конфликтующих сторон, стремящейся своими средствами нападения увеличить вероятность отказа подвижного объекта в течение конфликта в пространстве взаимодействия, то есть уменьшить надежность каналов связи подвижного объекта с системой его управления и надежность аппаратных компонентов подвижного объекта (подвижной технической системы). Таким образом, в качестве причины отказа участвующего в рассматриваемой конфликтной ситуации управляемого подвижного объекта являются отказы его аппаратных компонентов, отказы каналов связи системы управления и особенности свойств пространства, в котором перемещается управляемый объект, на которые может оказывать влияние противоположная конфликтующая сторона.

В общем виде рассматриваемая в данной работе задача противоборства технических систем в конфликтной ситуации может быть описана на содержательной уровне следующим образом.

В конфликтной ситуации участвует перемещающаяся в пространстве в заданную точку аппаратно резервированная структурно перестраиваемая система, управляемая по каналам связи. Интенсивности отказов компонентов этой подвижной системы и каналов связи являются функциями времени и точки пространства, в котором находится подвижная система.

Требуется определить оптимальные траектории движения системы, вектор моментов настройки системы для самозащиты и векторы резервирования, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы, участвующей в конфликте подвижной системы, в заданной точке пространства.

В такой постановке данная задача на формальном уровне была сформулирована в [17]. В данной работе дается ее решение.

Проблемы теоретического исследования и практического решения задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях широки и многообразны. Они во многом зависят от предметной области, в которой развивается конфликт, и интересов участников конфликта, а это накладывает дополнительные сложности и ограничения на разработку математических моделей конфликтов, алгоритмов их разрешения и программного обеспечения для реализации на практике этих алгоритмов, обеспечивающих конфликтующим сторонам выбор оптимальных стратегий поведения в течение конфликта.

Как следует из литературных источников, многие проблемные вопросы противоборства в конфликтных ситуациях находятся в стадии разработки, и многие конфликтные ситуации в настоящее время, к сожалению, оказались вне поля внимания специалистов. Поэтому делать сейчас какие-то научные обобщения в этой области знаний не представляется возможным. В связи с этим автором книги принято решение изложить на ее страницах постановку и решение лишь тех задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях, которые получены в последние годы и для решения которых разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение.

В предлагаемой читателю книге решение всех рассматриваемых задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях доведено до численных алгоритмов, представленных в форме, удобной для реализации на персональных ЭВМ, а в при-

ложении дано описание программного комплекса для решения ряда рассматриваемых в четвертом разделе задач, разработанного аспиранткой О. А. Горн, за что автор книги приносит ей глубокую благодарность и желает творческих успехов.

Внимательный читатель легко может заметить, что рассмотренные в книге модели и алгоритмы для решения задач противоборства технических систем могут быть, при соответствующей идентификации, применимы и для решения задач оптимизации поведения противоборствующих сторон в конфликтных ситуациях для систем иной физической природы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ ПРОТИВОБОРСТВА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, УЧАСТВУЮЩЕЙ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

В данном разделе в качестве объекта исследования выбрана достаточно удобная для моделирования аппаратно-избыточная техническая система $S(n, m, \bar{s})$, состоящая из n ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$) основных и m ($m = s_1 + s_2 + \dots + s_q$) резервных блоков, разбитых на q групп, в каждой из которых возможна замена отказавших основанных только резервными блоками из этой группы. При этом целочисленный вектор $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$, соответствующий распределению резервных блоков в q группах, будем называть вектором резервирования. В предположении работы $S(n, m, \bar{s})$ -системы в стационарных условиях, то есть вне конфликтной ситуации, поставим в соответствие каждой из q групп основных блоков интенсивности отказов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. В частом случае интенсивности отказов λ_i ($1 \leq i \leq q$) могут быть одинаковые. При этом будем считать, что резервные блоки могут находиться в другом, например, облегченном режиме функционирования с интенсивностью отказов λ_0 , а при подключении их вместо отказавших ос-

новых блоков они работают в том же режиме, что и основные блоки в этой группе, т. е. с интенсивностью отказов λ_i ($1 \leq i \leq q$).

Для упрощения модели будем также считать, что отказы основных блоков обнаруживаются в моменты их возникновения, а время подключения резервного блока вместо отказавшего пренебрежимо мало и в модели не учитывается. Отказы резервных блоков, не включенных вместо отказавших основных, не фиксируются, однако они уменьшают ресурс надежности рассматриваемой технической системы. Для удобства машинного моделирования, положим, что вероятность отказа системы контроля работы системы $S(n, m, \bar{s})$ и подключения резервных блоков пренебрежимо мала.

Учитывая вероятностный характер поведения рассматриваемой $S(n, m, \bar{s})$ -системы, обозначим через E_k ($0 \leq k \leq m$) – работоспособные состояния с k отказавшими блоками; E_r ($r = m + 1$) – поглощающее состояние системы, то есть состояние полного отказа системы; A_k ($1 \leq k \leq m$) – интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние E_k ; B_k ($1 \leq k \leq m + 1$) – интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние отказа E_r ; $p_k(t)$ ($0 \leq k \leq m + 1$) – вероятность нахождения системы в момент времени t в состоянии E_k . При этом, очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{m+1} p_k(t) = 1. \quad \text{Аппроксимируя поведение рассматриваемой}$$

$S(n, m, \bar{s})$ -системы однородным марковским процессом, не трудно получить по известной методике [19] систему дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих функционирование

данной системы в условиях стационарной (без конфликтов) работы:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -D_1 p_0(t), \\ p'_k(t) &= A_k p_{k-1}(t) - D_{k+1} p_k(t), \\ 1 \leq k \leq m, \\ p'_r(t) &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k p_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_r(0) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} D_k &= A_k + B_k, \quad 1 \leq k \leq m, \\ D_{m+1} &= B_{m+1}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (1.1) для вероятности безотказной работы $S(n, m, \bar{s})$ -системы $P_{S(n, m, \bar{s})}(t)$ и среднего времени ее безотказной работы $T_{S(n, m, \bar{s})}$ имеют следующий вид [6]:

$$P_{S(n, m, \bar{s})}(t) = \exp(-D_1 t) + \sum_{k=1}^m \prod_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\exp(-D_i t)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (D_j - D_i)}, \quad (1.2)$$

$$T_{S(n, m, \bar{s})} = \frac{1}{D_1} + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\prod_{j=1}^k A_j}{D_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k+1} (D_j - D_i)}. \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3) удобны для сравнительного анализа характеристик надежности $S(n, m, \bar{s})$ -системы, работающей в стационарном режиме и в условиях конфликта.

**1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТИ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ $S(n, m, \bar{s})$ -СИСТЕМЫ
В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ**

Будем считать, что система $S(n, m, \bar{s})$ оказалась в конфликтной ситуации и вступает в противоборство с противником, преследующим цель дестабилизировать ее работу, то есть уменьшить ресурс работоспособности системы. В качестве средств атаки противник имеет возможность увеличивать в течение времени конфликта интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ ($1 \leq i \leq q$) основных блоков и интенсивности отказов не включенных в работу резервных блоков $\lambda_0(t)$ системы, то есть усиливать «старение» технической системы $S(n, m, \bar{s})$. Стратегией атакующего противника является использование соответствующих средств, приводящих к возрастанию интенсивности отказов $\lambda_0(t)$ и $\lambda_i(t)$, например, от линейного до экспоненциального закона.

В подобной конфликтной ситуации основным ресурсом защиты от атакующего противника у системы $S(n, m, \bar{s})$ являются резервные элементы, а стратегией защищающейся стороны является оптимальное с точки зрения повышения надежности работы атакуемой технической системы распределение m резервных элементов между q группами.

Таким образом, основная решаемая задача оптимального резервирования с замещением отказавших основных блоков резервными с постоянным во времени вектором $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ пу-

тем вычисления такого распределения m резервных блоков по q группам, которое при заданном разбиении n основных блоков обеспечивает для успешного противоборства (по мнению защищающейся стороны) либо максимальную вероятность безотказной работы системы для заданного момента времени, либо максимальное среднее время работы этой системы до отказа, либо решаются обе указанные задачи и выбирается лучший вариант исходя из складывающейся в процессе конфликта ситуации.

Таким образом, основная задача противоборства системы $S(n, m, \bar{s})$ сводится к вычислению соответствующих оптимальных целочисленных векторов $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ резервирования, максимизирующих рассматриваемые показатели надежности конфликтующей технической системы [20].

Граф состояний системы $S(n, m, \bar{s})$ в предположении, что интенсивности отказов основных и резервных блоков одинаковые и равны $\lambda(t)$ ($\lambda(t)$ – возрастающая функция во время противоборства), изображен на рис. 1.1, где E_k ($0 \leq k \leq m$) – работоспособное состояние системы $S(n, m, \bar{s})$ с k отказавшими блоками; E_r ($r = m + 1$) – состояние “гибели” (поглощающее состояние) ИНС; $A_k \lambda(t)$ ($1 \leq k \leq m$) – интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние E_k ; $B_k \lambda(t)$ ($1 \leq k \leq m + 1$) – интенсивность переходов системы из состояния E_{k-1} в состояние “гибели” E_r ($r = m + 1$).

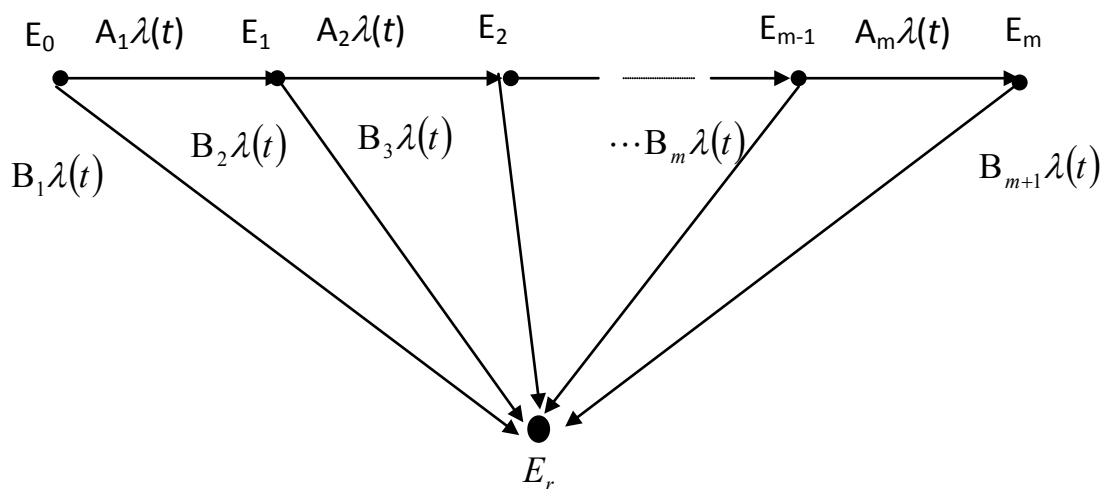


Рис. 1.1. Граф состояний технической $S(n, m, \bar{s})$ -системы,
находящейся в условиях противоборства

Соответствующая графу на рис. 1.1 система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающая поведение системы $S(n, m, \bar{s})$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -D_1\lambda(t)p_0(t), \\
 p'_k(t) &= A_k\lambda(t)p_{k-1}(t) - D_{k+1}\lambda(t)p_k(t), \\
 k &= 1, 2, \dots, m \\
 p'_r(t) &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k\lambda(t)p_{k-1}(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{m+1}(0) = 0,$$

где $p_k(t)$, $(0) \leq k \leq m+1$, – вероятность нахождения системы $S(n, m, \bar{s})$ в момент времени t в состоянии E_k ; $D_k = A_k + B_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, $D_{m+1} = B_{m+1}$.

Расширим рассматриваемую модель противоборствующей $S(n, m, \bar{s})$ -системы и будем полагать, что каждый резервный блок

может отказывать с интенсивностью $\lambda_0(t)$, а основные блоки, разбитые на q групп, отказывают соответственно с интенсивностями $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_q(t)$, причем $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq q$, являются возрастающими функциями времени и, в частном случае, могут быть одинаковыми, то есть $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, $0 \leq i \leq q$.

Граф состояний такой, участвующий в конфликте $S(n, m, \bar{s})$ -системы, по форме совпадает с графом рис. 1.1 и отличается от него лишь интенсивностями переходов из одного состояния в другое, которые соответственно обозначим A_k^* , B_k^* , D_k^* .

Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой системы, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -D_1^* p_0(t), \\ p'_k(t) &= A_k^* p_{k-1}(t) - D_{k+1}^* p_k(t), \\ k &= 1, 2, \dots, m \\ p'_r(t) &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k^* \lambda(t) p_{r-1}(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, \quad p_i(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

При этом $D_k^* = A_k^* + B_k^*$, $1 \leq k \leq m$, $D_{m+1}^* = B_{m+1}^*$.

Коэффициенты системы уравнений (1.5) вычисляются в соответствии с выражениями

$$A_k^* = \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_i(t), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$D_k^* = \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_i(t), \quad k = 1, 2, \dots, m+1,$$

где при $0 \leq k \leq m$ имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (m-k+1)R_k^*, & \text{если } i=0, \\ \delta_i n_i R_k^*, & \text{если } 1 \leq i \leq q; \end{cases}$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} (m-k+1)R_k^*, & \text{если } i=0, \\ \delta_i n_i R_k^* + n_i \Theta_i(k), & \text{если } 1 \leq i \leq q; \end{cases}$$

$$\beta_i(m+1) = \delta_i n_i, \quad 1 \leq i \leq q$$

$$R_k^* = \binom{n+m}{k}^{-1} R_k.$$

Коэффициенты δ_i и $\Theta_i(k)$, являющиеся элементами векторов $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$ и $\bar{\Theta}(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), \dots, \Theta_q(k))$, определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } s_i = 0, \\ 1, & \text{если } s_i \geq 1; \end{cases}$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq s_i, \\ 1, & \text{если } k \geq s_i + 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$.

Переменная R_k определяет число возможных попаданий системы $S(n, m, \bar{s})$ в состояние E_k и вычисляется [6] по формуле

$$R_k = \sum_{\bar{v} \in \Omega(k, \bar{s})} \prod_{i=1}^q \binom{n_i + s_i}{v_i}, \quad (1.6)$$

где

$$\Omega(k, \bar{s}) = \left\{ \bar{v} \mid v_1 + v_2 + \dots + v_q = k; \forall_i 0 \leq v_i \leq s_i \right\},$$

$\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ – целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов $(\bar{v} = \bar{x} + \bar{z})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ и $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_q)$.

Выражение (1.6) получено в предположении, что k отказов в системе распределились следующим образом: в i -й группе основных блоков x_i отказов, в i -й группе резервных блоков z_i отказов ($1 \leq i \leq q$). Если $x_i = 0$ или $z_i = 0$, то в соответствующей группе отказов не было.

Теперь можно ставить на формальном уровне задачи оптимизации вероятности безотказной работы и среднего времени безотказной работы, участвующей в конфликтной ситуации противоборствующей $S(n, m, \bar{s})$ -системы, подвергающейся атаке противника.

1.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ $S(n, m, \bar{s})$ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Задача заключается в следующем. Для заданного времени $t_f > 0$ найти вектор $\bar{s}^0$, максимизирующий вероятность безотказной работы $P(t_f, \bar{s}^0)$ технической $S(n, m, \bar{s})$ -системы, описываемой уравнениями (1.5), при заданных ограничениях на параметры системы.

Получить точное решение данной задачи не представляется возможным, так как входящие в систему (1.5) дифференциальные уравнения имеют переменные коэффициенты. Поэтому воспользуемся методом дискретизации для получения приближенного решения.

Для этого вычислим минимальное натуральное число r , удовлетворяющее условиям:

$$r \geq 2, \\ \max_{0 \leq i \leq q} \max_{1 \leq v \leq r} \max_{t \in \Delta_v} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| \leq \varepsilon,$$

где

$$\Delta_v = [t_{v-1}, t_v], \quad t_v = v\Delta t, \quad \Delta t = t_f / r,$$

$$\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)];$$

ε – заданное положительное число, представляющее собой наибольшее допустимое отклонение функций $\lambda_i(t)$ от констант λ_{iv} на интервалах дискретизации Δ_v для всех $1 \leq v \leq r$.

Очевидно, что $t_0 = 0$, $t_r = t_f$.

Тогда система уравнений (1.5) распадается на r систем с постоянными коэффициентами для $t \in \Delta_v$:

$$\begin{aligned} p'_{ov}(t) &= -D_{1v}^* p_{ov}(t), \\ p'_{k,v}(t) &= A_{kv}^* p_{k-1,v}(t) - D_{k+1,v}^* p_{kv}(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

с начальными условиями

$$p_{kv}(t_{v-1}) = \begin{cases} p_k(0) & \text{для } v = 1, \\ p_{k,v-1}(t_{v-1}) & \text{для } 2 \leq v \leq r. \end{cases}$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1.7) имеют следующий вид:

$$A_{kv}^* = \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_{iv}; \quad D_{kv}^* = \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_{iv}.$$

Решение системы уравнений (1.7) для $t \in \Delta_v$ может быть записано в следующей форме:

$$\begin{aligned} p_{ov}(t) &= p_{0,v-1}(t_{v-1}) \exp(-D_{1v}^* t), \\ p_{kv}(t) &= \sum_{j=0}^k p_{j,v-1}(t_{v-1}) \prod_{i=j+1}^k A_{iv}^* \sum_{\ell=j+1}^{k+1} \frac{\exp(-D_{\ell v}^* t)}{\prod_{\substack{i=j+1 \\ i \neq \ell}}^{k+1} (D_{iv}^* - D_{\ell v}^*)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

Обозначим через $S(m)$ множество

$$S(m) = \{\bar{s} | s_1 + s_2 + \dots + s_q = m, \forall_i s_i \geq 0\}.$$

Теперь задачу вычисления вектора $\bar{s}^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_q^0)$, максимизирующего вероятность безотказной работы $P(t_f, \bar{s}^0)$, $S(n, m, \bar{s})$ -системы, можно решить, используя следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ 1.1

Начало.

1. Задать натуральные числа m, q , массив $\{n_1, n_2, \dots, n_q\}$, функции $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq q$, массив $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$ начальных значений, число $t_f > 0$, число $\varepsilon > 0$.

2. Положить $r = 2$.

3. Вычислить число $\Delta t = t_f / r$ и массив $\{t_0, t_1, \dots, t_r\}$.

4. Положить $i = 0$.

5. Положить $v = 1$.

6. Вычислить $\lambda_{iv} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{v-1}) + \lambda_i(t_v)]$.

7. Вычислить число $\varphi_{iv}^r = \max_{t \in \Delta} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}| = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_v) - \lambda_i(t_{v-1})]$.

8. Положить $v = v + 1$.

9. Если $v \leq r$, идти к п. 6.

10. Вычислить число $\varphi_i^r = \max_{1 \leq v \leq r} \{\varphi_{iv}^r\}$.

11. Положить $i = i + 1$.

12. Если $i \leq m$, идти к п. 5.

13. Вычислить число $\varphi_i^r = \max_{0 \leq i \leq m} \{\varphi_{iv}^r\}$.

14. Если $\varphi^r \leq \varepsilon$, идти к п. 17.

15. Положить $r = r + 1$.
16. Идти к п. 3.
17. Задать целочисленный вектор $\bar{s} \in S(m)$.
18. Положить $v = 1$.
19. Вычислить $p_{kv}(t_v)$, $0 \leq k \leq m$, по формулам (1.8).
20. Положить $v = v + 1$.
21. Если $v \leq r$, идти к п. 19.
22. Вычислить $P(t_f, \bar{s}) = \sum_{k=0}^m p_{kr}(t_f)$.
23. Выполнить процедуру пп. 17 – 22 для всех $\bar{s} \in S(m)$.
24. Вычислить вектор $\bar{s}^0$, для которого $P(t_f, \bar{s}^0) = \max_{\bar{s} \in S(m)} P(t_f, \bar{s})$.
25. Конец ($\bar{s}^0$ – искомый вектор).

1.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ $S(n, m, \bar{s})$ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Задача заключается в следующем. Найти вектор $\bar{s}^1$, максимизирующий среднее время безотказной работы $T(S(n, m, \bar{s}^1))$ технической $S(n, m, \bar{s})$ -системы, описываемой уравнениями (1.5), при заданных ограничениях на параметры системы.

Для решения данной задачи воспользуемся выражением (1.8) и для достаточно больших значений t_f получим

$$T(S(n, m, \bar{s})) = \int_0^{\infty} P(t) dt \approx \int_0^{t_f} P(t) dt = \sum_{v=1}^r \int_{t_{v-1}}^{t_v} p_v(t) dt = \sum_{v=1}^r \int_{t_{v-1}}^{t_v} \left(\sum_{k=0}^m p_{kv}(t) \right) dt.$$

Обозначив

$$\psi_v = \int_{t_{v-1}}^{t_v} \left(\sum_{k=0}^m p_{kv}(t) \right) dt,$$

имеем

$$T(S(n, m, \bar{s})) = \sum_{v=1}^r \psi_v.$$

Нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} \psi_v = & \frac{p_{0,v-1}(t_{v-1})}{D_{lv}^*} [\exp(-D_{lv}^* t_{v-1}) - \exp(-D_{lv}^* t_v)] + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^k p_{j,v-1}(t_{v-1}) \prod_{i=j+1}^k A_{iv}^* \sum_{\ell=j+1}^{k+1} \frac{\exp(-D_{\ell v}^* t_{v-1}) - \exp(D_{\ell v}^* t_v)}{D_{\ell v}^* \prod_{i=j+1}^{k+1} (D_{iv}^* - D_{\ell v}^*)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

После сделанных преобразований задачу вычисления вектора $\bar{s}^1 = (s_1^1, s_2^1, \dots, s_q^1)$, максимизирующего среднее время безотказной работы $T(S(n, m, \bar{s}^1))$, участвующей в конфликтной ситуации, противоборствующей $S(n, m, \bar{s})$ -системы, можно решить, используя следующий алгоритм, при условии, что заданы все параметры системы (см. п. 1. алгоритма 1.1).

АЛГОРИТМ 1.2

Начало.

1. Задать вектор $\bar{s} \in S(m)$.
2. Задать $t_f^1 = 1, \varepsilon > 0$.
3. Положить $i = 1, t_f = t_f^1$.

4. Выполнить процедуру пп. 2–21 алгоритма 1.1.
5. Если $\psi_r < \varepsilon$, идти к п. 9 данного алгоритма.
6. Положить $i = i + 1$.
7. Вычислить $t_f = it_f^1$.
8. Идти к п. 4 данного алгоритма.
9. Вычислить $T(S(n, m, \bar{s})) = \sum_{v=1}^r \psi_v$, используя формулу (1.9).
10. Выполнить процедуру пп. 2–9 данного алгоритма для всех $\bar{s} \in S(m)$.
11. Вычислить вектор $\bar{s}^1$, для которого $T(S(n, m, \bar{s}^1)) = \max_{\bar{s} \in S_1^*(m)} T(S(n, m, \bar{s}))$.
12. Конец ($\bar{s}^1$ – искомый вектор).

1.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО РЕСУРСА

СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ АТАКУЕМОЙ СИСТЕМЫ $S(n, m, \bar{s})$,

ГАРАНТИРУЮЩЕГО НАДЕЖНОСТЬ ЕЕ РАБОТЫ НЕ НИЖЕ ЗАДАННОЙ

В подразделах 1.3. и 1.4 в качестве основного ресурса защиты атакуемой системы $S(n, m, \bar{s})$ являлись m резервных блоков, распределяемых между q группами основных блоков таким образом, чтобы обеспечить этой системе в течение времени конфликта требуемый уровень надежности.

Из теории надежности известно [21], что неограниченное увеличение в системах, подобных системе $S(n, m, \bar{s})$, числа резерв-

ных блоков позволяет получить сколько угодно близкое к единице значение вероятности безотказной работы соответствующей системы. Практика же показывает, что увеличение числа резервных блоков приводит к существенному усложнению переключателей, системы диагностики и контроля, что в большинстве случаев оказывается не приемлемым. К тому же, увеличение в системе $S(n, m, \bar{s})$ интенсивности отказов основных и резервных блоков $\lambda_i(t)$ под воздействием противника при достаточно длительном времени конфликта приводит к обратному эффекту.

Поэтому возникают, естественным образом, задача нахождения минимального числа резервных блоков m и задача соответствующего их распределения по q группам основных блоков, обеспечивающих вероятность безотказной работы $P(m, \bar{s}, t_f)$ или среднее время безотказной работы $T(S(n, m, \bar{s}))$ атакуемой системы не ниже заданного значения [22].

Для решения указанных задач минимизации m при соответствующих ограничениях, воспользовавшись алгоритмом 1.1 и алгоритмом 1.2, сформулируем и дадим решение двух следующих задач.

1.5.1. Задача 1

Найти минимальное m , для которого множество

$$S_0^*(m) = \{\bar{s} \mid P(m, \bar{s}; t_f) \geq d\}$$

не пусто, и вычислить вектор $\bar{s}^0 \in S_0^*(m)$, максимизирующий вероятность безотказной работы $P(m, \bar{s}; t_f)$ атакуемой $S(n, m, \bar{s})$ -системы к моменту времени t_f .

Решением данной задачи является алгоритм 1.3.

АЛГОРИТМ 1.3

Начало.

1. Задать натуральное q ; массив $\{n_1, n_2, \dots, n_q\}$; функции $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq q$; число $t_f > 0$; число $\varepsilon > 0$.
2. Положить $m = 1$.
3. Для всех векторов $\bar{s} \in S(m)$ выполнить процедуру пп. 4–7 данного алгоритма.
4. Выполнить процедуру пп. 2–22 алгоритма 1.1.
5. Если $P(m, \bar{s}; t_f) < d$, идти к п. 7 данного алгоритма.
6. Запомнить $\bar{s}$ и $P(m, \bar{s}; t_f)$.
7. Положить $\bar{s} = \bar{0}$.
8. Сформировать множество $S_0^*(m)$.
9. Если $S_0^*(m) = \emptyset$, идти к п. 12 данного алгоритма.
10. Вычислить вектор $\bar{s}^0$ такой, что $P(m, \bar{s}^0, t_f) = \max_{\bar{s} \in S_0^*(m)} P(m, \bar{s}; t_f)$.
11. Идти к п. 14 данного алгоритма.
12. Положить $m = m + 1$.
13. Идти к п. 3 данного алгоритма.
14. Конец (m и $\bar{s}^0$ – искомые величины).

1.5.2. Задача 2

Найти минимальное m , для которого множество

$$S_1^*(m) = \{\bar{s} \mid T(S(n, m, \bar{s})) \geq T_1\}$$

не пусто, и вычислить вектор $\bar{s}^1 \in S_1^*(m)$, максимизирующий среднее время $T(S(n, m, \bar{s}))$ безотказной работы атакуемой $S(n, m, \bar{s})$ -системы.

Решением данной задачи является алгоритм 1.4.

АЛГОРИТМ 1.4.

Начало.

1. Задать натуральное $q; \{n_1, n_2, \dots, n_q\}$ функции $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq q$; T_1 ; $\varepsilon > 0$.
2. Положить $m = 1$.
3. Выполнить процедуру пп. 4–8 данного алгоритма для всех $\bar{s} \in S(m)$.
4. Выполнить процедуру пп. 2–21 алгоритма 1.1.
5. Выполнить процедуру пп. 2–9 алгоритма 1.2.
6. Если $T(S(n, m, \bar{s})) < T_1$, идти к п. 8 данного алгоритма.
7. Запомнить $\bar{s}$ и $T(S(n, m, \bar{s}))$.
8. Положить $\bar{s} = \bar{0}$.
9. Сформировать множество $S_1^*(m)$.
10. Если $S_1^*(m) = \emptyset$, идти к п. 13 данного алгоритма.

11. Вычислить $\bar{s}^1$, для которого

$$T(S(n, m, \bar{s}^1)) = \max_{\bar{s} \in S_1^*(m)} \max T(S(n, m, \bar{s})).$$

12. Идти к п. 15 данного алгоритма.

13. Положить $m = m + 1$.

14. Идти к п. 3 данного алгоритма.

15. Конец (m и $\bar{s}^1$ – искомые величины).

Приведенные алгоритмы 1.3 и 1.4, дающие численное решение задачи 1 и задачи 2 соответственно, решают поставленную проблему о минимальной избыточности резерва, то есть ресурса защиты, гарантирующего требуемую надежность атакуемой $S(n, m, \bar{s})$ -системы, и легко реализуются на современных персональных ЭВМ.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРОТИВОБОРСТВА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ ОТКАЗАВШИХ БЛОКОВ И С ДИНАМИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ В ПРОЦЕССЕ КОНФЛИКТА

В предыдущих разделах книги рассматривались участвующие в конфликтных ситуациях технические системы, у которых в качестве средства защиты от атак противника, приводящих к отказу основных блоков, использовались резервные блоки, распределенные соответствующим образом по группам между основными, которые при отказе основного блока в группе замещали его, то есть включались в работу вместо отказавшего. Ресурс средств защиты атакуемой системы определялся количеством резервных блоков и их распределением по группам. При этом предполагалось, что ни основные, ни резервные блоки восстановлению после отказа не подлежат.

В современных технических системах, таких как радиоэлектронные, вычислительные, нейрокомпьютерные и другие, которые с большой вероятностью могут оказаться в конфликтной ситуации и участвовать в противоборстве, достаточно часто применяется резервирование с восстановлением отказавших блоков [19, 23, 24, 25]. У таких систем ресурс средств защиты от атак противника возрастает за счет возможности восстановления от-

казавших блоков в течение конфликта и возвращения их в рабочее состояние.

Рассмотрению математических моделей таких систем и алгоритмов оптимального восстановления отказавших блоков для достижения поставленных целей в процессе противоборства с атаками противника посвящен следующий подраздел.

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОСЛЕ ОТКАЗОВ АТАКУЕМОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $S(n, t, \bar{s}, \bar{\mu})$ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

В данном подразделе в качестве объекта исследования рассматривается восстанавливаемая после отказов техническая $S(n, t, \bar{s}, \bar{\mu})$ -система, структура которой в основном совпадает со структурой системы $S(n, t, \bar{s})$, подробно рассмотренной в подразделе 1.1 данной работы, и отличается от нее лишь тем, что отказывающие в процессе противоборства блоки восстанавливаются с интенсивностью $\mu(t)$ и после восстановления продолжают работать в том же режиме, что и до отказа.

В дальнейшем будем, по возможности, пользоваться понятиями и обозначениями, введенными ранее.

Граф состояний и переходов из одного состояния в другое, описывающий поведение рассматриваемой восстанавливаемой после отказов технической $S(n, t, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы, представлен на рис. 2.1.

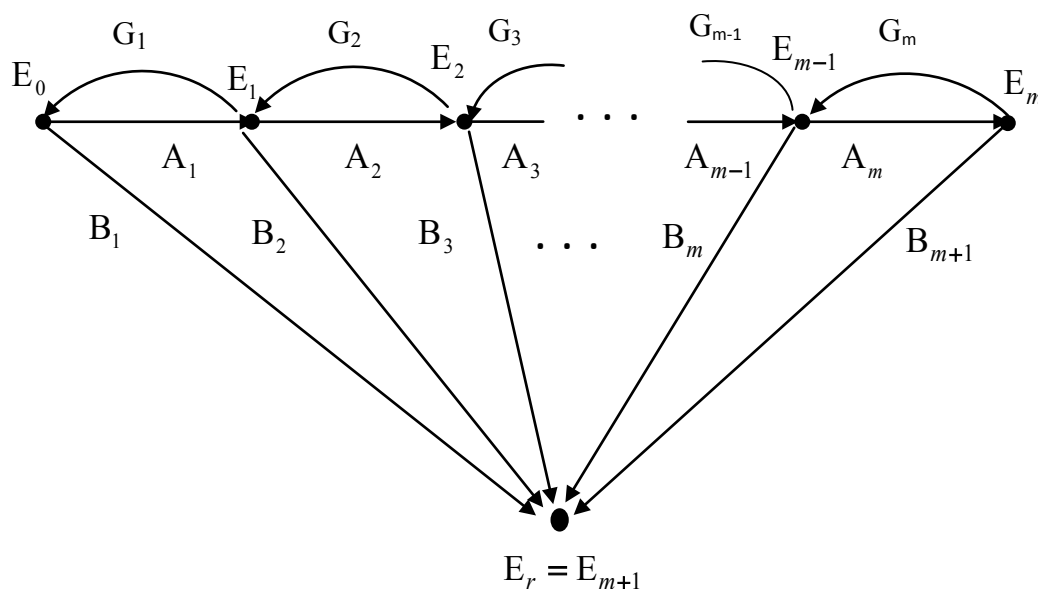


Рис. 2.1. Граф состояний восстанавливаемой
после отказов технической $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы

Изображенные на графе состояния E_k ($0 \leq k \leq m+1$) и интенсивности переходов A_k ($1 \leq k \leq m$) и B_k ($1 \leq k \leq m+1$) имеют тот же смысл и значения, что и A_k^* , B_k^* в подразделе 1.2, а интенсивность перехода системы из состояния E_k в состояние E_{k-1} , обозначенная G_k ($1 \leq k \leq m$), то есть интенсивность восстановления $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы, при наличии в сети k отказов, определяется выражением $G_k = \sum_{i=1}^q \mu_i(t)$, где $\mu_i(t)$ – интенсивность восстановления отказавших блоков в i -й группе ($1 \leq i \leq q$).

Очевидно, что по техническим соображениям процесс восстановления в данный момент возможен только в одной i -й группе, поэтому обозначим $\mu(t) = \sum_{i=1}^q \mu_i(t)$.

Тогда, опуская индекс (*) у A_k^* и B_k^* , получим систему уравнений Колмогорова, соответствующую графу на рис. 2.1, в следующем виде:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -D_1 p_0(t) + \mu(t) p_1(t), \\ p'_k(t) &= A_k p_{k-1}(t) - (D_{k+1} + \mu(t)) p_k(t) + \mu(t) p_{k+1}(t), \\ k &= 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} p'_m(t) &= A_m p_{m-1}(t) - (D_{m+1} + \mu(t)) p_m(t), \\ p'_{m+1}(t) &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k p_{k-1}(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{m+1}(0) = 0.$$

При этом $D_k = A_k + B_k$ ($1 \leq k \leq m$), а $D_{m+1} = B_{m+1}$.

Теперь сформулируем задачу оптимального восстановления рассматриваемой системы $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ [26].

Для заданных функций $\lambda_i(t)$, $0 \leq i \leq q$, и заданного вектора резервирования $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ определить интенсивности восстановления $\mu_i(t)$, $1 \leq i \leq q$, блоков в группах, минимизирующих функционал:

$$U(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q) = \int_0^{t_f} \left[\sum_{i=1}^q c_i(t) \mu_i(t) \right] dt, \quad (2.2)$$

при условии, что вероятность безотказной работы восстанавливаемой $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы

$$P(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q; t_f) \geq d, \quad 0 < d < 1, \quad (2.3)$$

где t_f – время функционирования системы в конфликтной ситуации; $c_i(t)$ – заданные неубывающие функции, моделирующие удельную стоимость восстановления отказавших блоков в i -й группе; $P(t)$ – вероятность безотказной работы технической системы в течение времени t .

Очевидно, что $P(t) = \sum_{k=0}^m p_k(t)$, где $p_k(t)$ – вероятность нахождения рассматриваемой системы в состоянии E_k .

Функционал (2.2) выбран по аналогии с [6], исходя из соображений минимизации стоимости восстановления. Система $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ к моменту времени t_f должна быть работоспособной с вероятностью не ниже d при минимальной стоимости восстановления.

2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОТКАЗАВШИХ БЛОКОВ АТАКУЕМОЙ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

$S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -СИСТЕМЫ

Анализ поставленной в подразделе 2.1 задачи оптимального восстановления отказавших блоков атакуемой системы с целью восстановления ее ресурса для противоборства с атакующим противником показал, что рассматриваемую задачу можно сформулировать в терминах теории оптимального управления [27].

Будем считать вектор $\bar{P} = (p_0, p_1, \dots, p_m)$ фазовым вектором, а $\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_q(t))$ – векторным управлением. Тогда уравне-

ние управляемой системы, которой является восстанавливаемая техническая $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -система, можно записать в виде

$$\bar{P}'(t) = D_{S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})}(\bar{\mu}) \bar{P}(t) \quad (2.4)$$

с начальными условиями

$$\bar{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где матрица $D_{S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})}$ имеет следующий вид:

$$D_{S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})} = \begin{pmatrix} -D_1 & \mu & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ A_1 & -(D_2 + \mu) & \mu & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -(D_3 + \mu) & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -(D_m + \mu) & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & A_m & -(D_{m+1} + \mu) \end{pmatrix}$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к необходимости найти в классе кусочно-непрерывных неотрицательных управлений такое управление $\bar{\mu}(t)$, которое минимизирует функционал (2.2) при выполнении неравенства (2.3).

При этом

$$P(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q; t) = P(\bar{\mu}; t) = \sum_{k=0}^m p_k(t),$$

$$\bar{P}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t)) -$$

решение уравнения (2.4) с начальными условиями (2.5).

Аналитическое решение поставленной задачи невозможно, поэтому приведем ее к виду, удобному для реализации на компьютере [20].

Для этого уравнение (2.4) перепишем в виде [28, 29]

$$\bar{P}'(t) = Q\bar{P}(t) + \mu(t)H\bar{P}(t), \quad (2.6)$$

где $Q = \sum_{i=0}^q Q_i$ – переменная матрица; H – постоянная матрица,

$$Q_i = \begin{pmatrix} -\beta(1)\lambda_i & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \alpha_i(1)\lambda_i & -\beta_i(2)\lambda_i & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i(2)\lambda_i & -\beta_i(3)\lambda_i & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\beta_i(m)\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \alpha_i(m)\lambda_i & -\beta_i(m+1)\lambda_i \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Выражения для $\alpha_i(k)$, $1 \leq k \leq m$ и $\beta_i(k)$, $1 \leq k \leq m+1$, приведены в подразделе 1.2.

Воспользуемся методом дискретизации для получения приближенного решения уравнения (2.6).

Для этого выберем интервал дискретизации $\Delta t = t_f / \nu$ при условии, что минимальное натуральное число ν , удовлетворяет следующим требованиям:

$$\nu \geq 2,$$

$$\max \left\{ \max_{0 \leq i \leq q} \max_{1 \leq r \leq \nu} \max_{t \in \Delta_r} |\lambda_i(t) - \lambda_{ir}|, \right. \\ \left. \max_{1 \leq i \leq q} \max_{1 \leq r \leq \nu} \max_{t \in \Delta_r} |c_i(t) - c_{ir}| \right\} \leq \varepsilon,$$

где ε – заданное положительное число, определяющее наибольшее допустимое отклонение функций $\lambda_i(t)$ и $c_i(t)$ от констант λ_{ir} и c_{ir} соответственно на интервале Δ_r для всех i и $1 \leq r \leq \nu$. Интервал $\Delta_r = \{t \mid t \in [t_{r-1}, t_r]\}$, при этом $t_r = r \cdot \Delta t$ ($0 \leq r \leq \nu$). Ясно, что $t_0 = 0$, $t_\nu = t_f$.

На интервале Δ_r заменим функции $\lambda_i(t)$, $c_i(t)$ и $\mu_i(t)$ приближенными значениями, рассчитанными по формулам

$$\lambda_{ir} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{r-1}) + \lambda_i(t_r)], \quad 0 \leq i \leq q, \\ c_{ir} = \frac{1}{2}[c_i(t_{r-1}) + c_i(t_r)], \quad 1 \leq i \leq q, \\ \mu_{ir} = \frac{1}{2}[\mu_i(t_{r-1}) + \mu_i(t_r)], \quad 1 \leq i \leq q.$$

С учетом сделанных преобразований система (2.6) разобьется на ν систем с постоянными коэффициентами:

$$\bar{P}'_r = Q_r \bar{P}_r + \mu_r H \bar{P}_r, \quad (2.7) \\ 1 \leq r \leq \nu, \quad t \in \Delta_r$$

с начальными условиями $\bar{P}_r(t_{r-1}) = \bar{P}_{r-1}(t_{r-1})$, причем $\bar{P}_1(0) = \bar{P}(0)$.

При этом

$$\mu_r = \sum_{i=1}^q \mu_{ir},$$

а матрицы Q_r получаются из матрицы Q соответствующей заменой $\lambda_i(t)$ на λ_{ir} .

В этом случае функционал (2.2) примет вид

$$U^*(\bar{\mu}) = \Delta t \sum_{r=1}^v \sum_{i=1}^q c_{ir} \mu_{ir}. \quad (2.8)$$

Решение системы уравнений (2.7) зависит [30] от спектра матрицы $D_r = Q_r + H$. Обозначив спектр этой матрицы в порядке убывания $\{z_0^r, z_1^r, \dots, z_m^r\}$ и следуя [31, 32], получим решение системы (2.7) в виде

$$p_{kr}(t) = \sum_{j=0}^m \left[\sum_{i=0}^m b_{jik}^r p_{i,r-1}(t_{r-1}) \right] \exp(z_j^r t), \quad (2.9)$$

где

$$b_{jik}^r = (-1)^{i+k} \frac{\prod_{\ell=0}^{m-1} (z_j^r - z_{\ell ik}^r)}{\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^m (z_j^r - z_{\ell}^r)}, \quad (2.10)$$

а $\{z_{0ik}^r, z_{1ik}^r, \dots, z_{m-1,ik}^r\}$ – спектр матрицы D_{ik}^r – главного минора матрицы D_r , получаемого из матрицы D_r , вычеркиванием i -й строки и k -го столбца. Очевидно, что матрицы D_{ik}^r либо трехдиагональные, либо треугольные.

Таким образом, вероятность безотказной работы, восстанавливаемой после отказов блоков технической $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы, вычисляется по формуле

$$P(\{\bar{\mu}\}; t_f) = \sum_{k=0}^m p_{kv}(t_f),$$

где $p_{kv}(t_f)$ определяются по рекуррентной процедуре из формул (2.9) и (2.10); $\{\bar{\mu}\}$ – последовательность векторов $\bar{\mu}_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{iv})$, $1 \leq i \leq q$.

Следовательно, задача оптимизации восстановления $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы свелась к вычислению такой последовательности векторов $\{\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots, \bar{\mu}_q\}$ в классе векторов с неотрицательными координатами, чтобы функционал $U^*(\bar{\mu})$ был минимальным при сохранении условия $P(\bar{\mu}; t_f) \geq d$, $0 < d < 1$.

Для решения рассматриваемой оптимизационной задачи методом дискретизации, с целью получения приближенного решения уравнения (2.6), обозначив минимизируемый функционал (2.8) через $U^*(\{\bar{\mu}\})$, будем производить такую последовательность действий, чтобы, начиная с некоторых функций – констант $\mu_i(t) \equiv \mu_{oi}$, с помощью локальных вариаций $\Delta \mu_i$ управлений на каждом интервале дискретизации Δ_r ($1 \leq r \leq v$) получить такую последовательность $\{\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_q(t)\}$ кусочно-постоянных функций, чтобы модуль разности между последовательными значениями функционала $U^*(\{\bar{\mu}\})$ стал меньше заданного числа ε , определяющего точность решения.

Очевидно, что вычисление собственно оптимального управления должно предшествовать вычислению числа дискретизаций v . Теперь не трудно построить численный алгоритм решения поставленной задачи оптимизации восстановления атакуемой $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -системы.

2.3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ -СИСТЕМЫ ПОСЛЕ ОТКАЗОВ

Выше было показано, что рассмотренная в подразделе 2.2 задача оптимизации восстановления после отказов системы $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$ сводится к задаче оптимального управления, решение которой ведет к вычислению соответствующей последовательности векторов

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \dots, \mu_{1,v}), \\ &\dots\dots\dots, \\ \mu_q &= (\mu_{q,1}, \mu_{q,2}, \dots, \mu_{q,v}),\end{aligned}$$

обеспечивающих требование, чтобы функционал $U^*(\{\bar{\mu}\})$ был минимальным при сохранении условия $P(\bar{\mu}; t_f) \geq d$, $0 < d < 1$. Ниже приводится алгоритм численного решения поставленной задачи оптимизации.

АЛГОРИТМ 2.1

Начало.

1. Задать последовательности $\{n_1, n_2, \dots, n_q\}$, $\{s_1, s_2, \dots, s_q\}$; функции $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_q(t)$ и $c_0(t) \equiv 0$, $c_1(t), \dots, c_q(t)$; числа $\varepsilon > 0$, $d(0 < d < 1, t_j > 0)$.
2. Положить $\nu = 2$.
3. Вычислить число $\Delta t = t_\nu / 2$ и последовательность $\{t_0, t_1, \dots, t_\nu\}$.
4. Положить $i = 0$.
5. Положить $r = 1$.

6. Вычислить $\lambda_{ir} = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_{r-1}) + \lambda_i(t_r)]$, $c_{ir} = \frac{1}{2}[c_i(t_{r-1}) + c_i(t_r)]$.

7. Положить $r = r + 1$.

8. Если $r \leq \nu$, идти к п. 6.

9. Положить $i = i + 1$.

10. Если $i \leq q$, идти к п. 5.

11. Положить $i = 0$

12. Положить $r = 1$.

13. Вычислить для неубывающих функций $\lambda_i(t)$ и $c_i(t)$:

$$\varphi_{ir} = \max_{t \in \Delta_r} |\lambda_i(t) - \lambda_{ir}| = \frac{1}{2}[\lambda_i(t_r) - \lambda_i(t_{r-1})],$$

$$\Psi_{ir} = \max_{t \in \Delta_r} |c_i(t) - c_{ir}| = \frac{1}{2}[c_i(t_r) - c_i(t_{r-1})].$$

14. Положить $r = r + 1$.

15. Если $r \leq \nu$, идти к п. 13.

16. Положить $i = i + 1$.

17. Если $i \leq q$, идти к п. 12.

18. Положить $i = 0$.

19. Вычислить $\varphi_i = \max_{0 \leq i \leq \nu} \{\varphi_i\}$; $\psi_i = \max_{0 \leq i \leq \nu} \{\psi_{ir}\}$.

20. Положить $i = i + 1$.

21. Если $i \leq q$, идти к п. 19.

22. Вычислить $\varphi_i = \max_{0 \leq i \leq q} \{\varphi_i\}$; $\psi = \max_{0 \leq i \leq q} \{\psi_i\}$.

23. Вычислить $\delta = \max\{\varphi, \psi\}$.

24. Если $\delta \leq \varepsilon$, идти к п. 27.

25. Положить $\nu = \nu + 1$.

26. Идти к п. 3.

(На этом определение числа дискретизаций заканчивается и начинается вычисление искомого управления.)

27. Задать $\varepsilon_1 > 0$.

28. Задать последовательность $\{\Delta\mu_1, \Delta\mu_2, \dots, \Delta\mu_q\}$, ($\Delta\mu_i > 0$) локальных вариаций управления.

29. Вычислить последовательность векторов $\{\bar{\mu}\}_0 = \{\bar{\mu}_{10}, \bar{\mu}_{20}, \dots, \bar{\mu}_{q0}\}$, где $\bar{\mu}_{io} = (\mu_{i1}^0, \mu_{i2}^0, \dots, \mu_{iv}^0)$ и $\mu_{ij}^0 = \Delta\mu_i + \max_{1 \leq r \leq v} \{\lambda_{ir}\}$, $1 \leq j \leq v$.

30. Вычислить $P(\{\bar{\mu}\}_0; t_f)$.

31. Если $P(\{\bar{\mu}\}_0; t_f) \geq d$, идти к п. 34.

32. Вычислить $\bar{\mu}_{io} = \bar{\mu}_{io} + \Delta\bar{\mu}_i$, где $\Delta\bar{\mu}_i = (\Delta\mu_{i1}, \Delta\mu_{i2}, \dots, \Delta\mu_{iv})$, $1 \leq i \leq q$.

33. Идти к п. 30.

34. Вычислить $U^*(\{\bar{\mu}\}_0)$.

35. Положить $i = 0$.

36. Положить $r = 1$.

37. Вычислить $\Delta\mu_{ir} = \mu_{ir}^0 / 2$.

38. Вычислить вектор $\bar{\mu}_{ir} = (\mu_{i1}^r, \mu_{i2}^r, \dots, \mu_{iv}^r)$, где

$$\mu_{ij}^r = \begin{cases} \mu_{ij}^0, & \text{если } j \neq r, \\ \mu_{ir}^0 - \Delta\mu_{ir}, & \text{если } j = r. \end{cases}$$

39. Вычислить последовательность $\{\bar{\mu}\}_1^i = \{\bar{\mu}_{11}^i, \bar{\mu}_{21}^i, \dots, \bar{\mu}_{q1}^i\}$, где

$$\bar{\mu}_{j1}^i = \begin{cases} \bar{\mu}_{jo}, & \text{если } j \neq i, \\ \bar{\mu}_{ir}, & \text{если } j = i. \end{cases}$$

40. Вычислить $P(\{\bar{\mu}\}_1^i; t_f)$.

41. Если $P(\{\bar{\mu}\}_1^i; t_f) \geq d$, идти к п. 44.
42. Вычислить $\Delta\mu_{ir} = \Delta\mu_{ir} / 2$.
43. Идти к п. 38.
44. Положить $r = r + 1$.
45. Если $r \leq \nu$, идти к п. 37.
46. Вычислить $U^*(\{\bar{\mu}\}_1^i)$.
47. Положить $i = i + 1$.
48. Если $i \leq q$, идти к п. 36.
49. Вычислить последовательность $\{\bar{\mu}\}_1$, для которой
$$U^*(\{\bar{\mu}\}_1) = \min_{0 \leq i \leq q} U^*(\{\bar{\mu}\}_1^i).$$
50. Если $U^*(\{\bar{\mu}\}_0) - U^*(\{\bar{\mu}\}_1) \leq \varepsilon_1$, идти к п. 53.
51. Положить $\{\bar{\mu}\}_0 = \{\bar{\mu}\}_1$.
52. Идти к п. 35.
53. Конец; $\{\bar{\mu}\}_1$ – искомое управление.

**2.4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ
КЛАССА ФУНКЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ $\mu(t)$,
ГАРАНТИРУЮЩИХ АТАКУЕМОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ
ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ РАБОТОСПОСОБНОЕ СОСТОЯНИЕ
ПРИ ЗАДАННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТКАЗОВ $\lambda(t)$**

Решить задачу в общем виде нахождения такого класса функций восстановления $\bar{\mu}(t)$ отказавших блоков, участвующей в конфликтной ситуации системы $S(n, m, \bar{s}, \bar{\mu})$, при заданных значениях интенсивности отказов $\lambda_i(t)$, который бы гарантировал

системе работоспособное состояние в течение всего времени конфликта, не представляется возможным.

Поэтому рассмотрим более простую задачу, которая, однако, представляет интерес как в теоретическом, так и в практическом плане.

Будем полагать, что рассматриваемая, защищающаяся от атак противника восстанавливаемая система состоит из n основных и одного резервного блока. Остальными компонентами технической системы будем пренебрегать. При появлении отказа одного из основных блоков он мгновенно замещается резервным, и отказавший блок восстанавливается и ставится в резерв. Обозначим рассматриваемую систему, по аналогии с предыдущим, через $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$.

Подобного рода задачи обычно решают при условии, что интенсивность отказов $\lambda = \text{const}$ и интенсивность восстановления $\mu = \text{const}$, то есть исследуемые системы не подвержены воздействию атакующей стороны, приводящей к возрастающей во времени функции $\lambda_i(t)$. Рассматриваемая система $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$ является «стареющей», где интенсивности отказов и восстановления основных блоков являются функциями времени, причем $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ неотрицательные и дифференцируемые функции и $\lambda'(t) \geq 0$.

Обозначив $p_0(t)$ – вероятность того, что $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$ -система находится в состоянии, когда к моменту времени t ни в одном из n блоков не произошел отказ, $p_1(t)$ – вероятность отказа к моменту времени t одного из n блоков и приняв условие, что состояние «отказа» системы наступает при отказе не менее двух блоков из n в течение времени восстановления отказавшего

блока, не трудно записать систему уравнений Колмогорова, (2.11) описывающих поведение рассматриваемой $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$ -системы:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= -(n-1)\lambda(t)p_0(t) + \mu(t)p_1(t), \\ p_1'(t) &= (n-1)\lambda(t)p_0(t) - [n\lambda(t) + \mu(t)]p_1(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0. \quad (2.12)$$

Сформулируем теперь решаемую аналитически задачу.

По заданной функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ найти такой класс функций интенсивности восстановления $\mu(t)$, чтобы любая функция из этого класса гарантировала работоспособное состояние атакуемой восстанавливаемой технической $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$ -системы в среднем в течение заданного времени T [6].

Решение поставленной задачи начнем с преобразования системы уравнений (2.11) путем исключения функции $p_0(t)$ и сведения ее к одному уравнению:

$$p_1''(t) + g(t)p_1(t) + h(t)p_1(t) = 0 \quad (2.13)$$

с начальными условиями

$$p_1(0) = 0, \quad p_1'(0) = (n+1)\lambda(0), \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} g(t) &= (2n+1)\lambda(t) + \mu(t) - \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}, \\ h(t) &= n(n+1)\lambda^2(t) + \mu'(t) - \mu(t)\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}. \end{aligned}$$

Сложив уравнения системы (2.11), получим

$$p'_0(t) + p'_1(t) = -n \lambda(t) p_1(t).$$

Отсюда интегрированием с учетом (2.12) получаем

$$p_0(t) + p_1(t) = 1 - n \int_0^t \lambda(s) p_1(s) ds. \quad (2.15)$$

Поскольку, в соответствии с постановкой, основной задачей является решение неравенства

$$\int_0^{\infty} (p_0(t) + p_1(t)) dt \geq T,$$

то из соотношения (2.15) следует, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$\int_0^{\infty} \left(1 - n \int_0^t \lambda(s) p_1(s) ds\right) dt \geq T. \quad (2.16)$$

Из очевидного соотношения

$$T = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) dt$$

следует, что неравенство (2.16) будет выполняться, если будет выполняться неравенство

$$\int_0^{\infty} \lambda(s) p_1(s) ds \leq \frac{1}{n} [1 - \exp(-\frac{t}{T})]. \quad (2.17)$$

Очевидно, что обе части неравенства (2.17) при $t = 0$ равны нулю, следовательно, оно будет выполняться, если будет выполняться неравенство

$$p_1(t) \leq \frac{\exp(-\frac{t}{T})}{nT\lambda(t)}. \quad (2.18)$$

Теперь следует найти условия, налагаемые на коэффициенты $g(t)$ и $h(t)$ уравнения (2.13), чтобы для решения $p_1(t)$, удовлетворяющего начальным условиям (2.14), было справедливо неравенство (2.18).

Для этого приведем уравнение (2.13) к каноническому виду подстановкой:

$$p_1(t) = z(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds\right). \quad (2.19)$$

Получим уравнение

$$z''(t) = J(t) z(t)$$

с начальными условиями

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = (n+1)\lambda(0),$$

где

$$J(t) = -h(t) + \frac{1}{4}g^2(t) + \frac{1}{2}g'(t).$$

После подстановки уравнения (2.19) в неравенство (2.18) получим

$$z(t) \leq \frac{1}{n\Gamma\lambda(t)} \exp \int_0^t g_1(s) ds, \quad (2.20)$$

где

$$g_1(t) = \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{T}.$$

Обозначим правую часть неравенства (2.20) через $\varphi(t)$. Легко убедиться, что $\varphi(t)$ является решением уравнения

$$\varphi''(t) = Q(t)\varphi(t)$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = (n\Gamma\lambda(0))^{-1-1}, \quad \varphi'(0) = (n\Gamma)^{-1}[\lambda^{-1}(0)g_1(0) + \lambda^{-2}(0)\lambda'(0)],$$

где
$$Q(t) = g_1^2 + g_1'(t) + 2\left(\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right)^2 - \frac{\lambda''(t)}{\lambda(t)} - 2\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}g_1(t).$$

Очевидно, что $z(0) < \varphi(0)$.

Выбирая $\mu(0)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu(0) \geq 2n(n+1)T\lambda^2(0) + \frac{2}{T} + 3\frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} - (2n+1)\lambda(0),$$

следует добиться того, что $\mu'(0) \leq \varphi'(0)$. Но тогда неравенство (2.20) будет выполняться при условии $J(t) \leq Q(t)$. Это неравенство эквивалентно следующему дифференцированному неравенству:

$$\mu'(t) - \left(\frac{1}{T} + 2\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right)\mu(t) - \psi(t) \geq 0, \quad (2.21)$$

где
$$\psi(t) = \frac{2n+1}{T}\lambda(t) - n(n+1)\lambda^2(t) + (2n+1)\lambda'(t) + \frac{\lambda'(t)}{T\lambda(t)} -$$
$$- 2\left(\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right)^2 - \frac{\lambda''(t)}{\lambda(t)} - \frac{1}{T^2}.$$

Согласно [33] решением неравенства (2.21) является функция

$$\mu^*(t) = \left[\frac{\mu(0)}{\lambda^2(0)} + \int_0^t \frac{\psi(s)}{\lambda^2(s)} \exp\left(-\frac{s}{T}\right) ds \right] \lambda^2(t) \exp\left(-\frac{t}{T}\right).$$

Следовательно, для всех интенсивностей восстановления $\mu(t) \geq \mu^*(t)$ среднее время работоспособного состояния атакуемой противником $S(n,1,1,\bar{\mu}(t))$ -системы будет не меньше T при заданной интенсивности отказов $\lambda(t)$ основных блоков системы.

2.5. ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ АТАКУЕМОЙ $S_D(n, m, \bar{s})$ -СИСТЕМЫ С ДИНАМИЧЕСКИМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ В ПРОЦЕССЕ КОНФЛИКТА

В подразделе 1.3 данной работы решена задача оптимизации вероятности безотказной работы $P(t_f, \bar{s}^0)$ противоборствующей в конфликтной ситуации системы $S(n, m, \bar{s})$ в предположении, что интенсивности отказов основных и резервных блоков под воздействием атакующего противника $\lambda_i(t)$ ($1 \leq i \leq q$) являются возрастающими функциями времени, а вектор резервирования $\bar{s}^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_q^0)$, $s_1^0 + s_2^0 + \dots + s_q^0 = m$, максимизирующий вероятность безотказной работы рассматриваемой системы после настройки, то есть распределение m резервных блоков по q группам в течение времени конфликта $[0, t_f]$ не изменяется (замены отказавших основных блоков резервными возможны только внутри каждой q группы). Будем называть такую систему системой со статическим резервированием.

Для решения указанной выше оптимизационной задачи на основе метода дискретизации и целочисленного программирования разработан алгоритм 1.1 (см. подраздел 1.3), который будем рассматривать как базовый для решения двух следующих оптимизационных задач максимизации функциональной надежности $S_D(n, m, \bar{s})$ -системы с динамическим резервированием.

Прежде чем перейти к рассмотрению этих задач, введем необходимые понятия и определения.

Будем называть атакуемую $S_D(n, m, \bar{s})$ -систему системой с динамическим резервированием, если в процессе работы вектор

резервирования $\bar{s}$ целенаправленно изменяется, то есть в процессе работы производится перераспределение m резервных блоков между q группами, сформированными перед началом работы системы в конфликтной ситуации.

Будем считать, что перераспределение резервных блоков между группами резервирования осуществляется мгновенно по соответствующей команде в определенные моменты времени $\tau_i (i \geq 1)$.

Назовем перераспределение резервных блоков настройкой $S_D(n, m, \bar{s})$ -системы, а моменты времени, в которые происходит настройка, – моментами настройки системы [34].

2.5.1. Первая задача оптимизации надежности

$S_D(n, m, \bar{s})$ -системы с динамическим резервированием

Полагаем, что настройки $S_D(n, m, \bar{s})$ -системы могут производиться в заданные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ ($\ell \geq 1$), при этом $\tau_0 = 0$.

Требуется определить последовательность векторов резервирования $\bar{s}_\omega^0 = (s_{1\omega}^0, s_{2\omega}^0, \dots, s_{q\omega}^0)$, $0 \leq \omega \leq \ell$, максимизирующих вероятность безотказной работы $S_D(n, m, \bar{s})$ -системы последовательно в заданные моменты настройки и в заданный момент времени t_f , $t_f > \tau_\ell$.

Получить точное решение данной задачи не представляется возможным. Поэтому для приближенного решения этой задачи воспользуемся методом дискретизации, которым была решена

аналогичная задача для $S(n, m, \bar{s})$ -системы со статическим резервированием в подразделе 1.3.

Обозначим целочисленное множество

$$S_{\omega} = \left\{ \bar{s}_{\omega} \mid \sum_{i=1}^q s_{i\omega} = m - \left[\sum_{k=0}^m k p_{k\omega}(\tau_{\omega}) \right]; s_{i\omega} \geq 0 \right\},$$

где $[*]$ – целое число, ближайшее к данному; $\sum_{k=0}^m k p_{k\omega}(\tau_{\omega})$ – математическое ожидание случайной величины $\varphi(\tau_{\omega}) = 0, 1, 2, \dots, m$, определяющей количество блоков, отказавших к моменту времени τ_{ω} в системе $S_D(n, m, \bar{s})$; $p_{k\omega}(\tau_{\omega})$ – вероятность нахождения системы $S_D(n, m, \bar{s})$ в момент времени τ_{ω} в состоянии с k отказавшими блоками. При этом, очевидно, $\sum_{k=0}^m p_{k\omega}(\tau_{\omega}) = 1$.

Обозначим процедуру пп. 2–24 базового алгоритма 1.1 через $\Pi_1(t_f, S)$. Тогда первую оптимизационную задачу можно решить при помощи следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 2.2

Начало.

1. Задать $\omega = 0$.

2. Выполнить $\Pi_1(\tau_{\omega+1}, S_{\omega})$ и определить $\bar{s}_{\omega}^0$.

3. Положить $\omega = \omega + 1$.

4. Если $\omega \leq \ell - 1$, идти к п. 2 данного алгоритма.

5. Выполнить $\Pi_1(t_f, S_{\ell})$.

6. Конец (последовательность настроек $\{\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_{\ell}^0\}$ – искомая).

2.5.2. Вторая задача оптимизации надежности

$S_D(n, m, \bar{s})$ -системы с динамическим резервированием

Данная оптимизационная задача является обобщением первой задачи.

Очевидно, что за заданное время t_f может быть произведено конечное число настроек атакуемой системы $S_D(n, m, \bar{s})$, не более чем $L(L \geq 1)$.

Требуется определить количество настроек $\ell (\ell \leq L)$, последовательность $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell\}$ моментов настройки и последовательность векторов резервирования $\bar{s}_\omega^0 = (s_{1\omega}^0, s_{2\omega}^0, \dots, s_{q\omega}^0)$, отвечающих моментам настройки $\tau_\omega, 1 \leq \omega \leq \ell$, таким образом, чтобы вероятность безотказной работы $S_D(n, m, \bar{s})$ -системы в моменты настройки и в момент времени $t_f, t_f > \tau_\ell$ были последовательно максимальными. При этом, как обычно, $\tau_0 = 0$.

Для решения данной задачи последовательно применим уже известный из подраздела 1.3 метод дискретизации.

Обозначим $\tau_{\ell+1} = t_f$ и множество $\Delta_\omega^* = [\tau_{\omega-1}, \tau_\omega[$, $1 \leq \omega \leq \ell + 1$.

Фиксируем ω и для заданного $\varepsilon > 0$ вычисляем натуральное $r(\omega)$. Определение числа ε и процедура вычисления $r(\omega)$ аналогичны определению ε и r , описанному в базовом алгоритме 1.1. Затем вычисляем $\Delta t_\omega = (\tau_\omega - \tau_{\omega-1}) / r(\omega)$ – интервал дискретизации на множестве Δ_ω^* .

Обозначим $t_\nu^\omega = \tau_{\omega-1} + \nu \Delta t_\omega$, $0 \leq \nu \leq r(\omega)$.

Очевидно, что $t_0^\omega = \tau_{\omega-1}$ и $t_{r(\omega)}^\omega = \tau_\omega$.

Обозначим далее $\Delta_{\nu\omega} = [t_{\nu-1}^\omega, t_\nu^\omega[$.

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\Delta_{\omega}^* = \bigvee_{v=1}^{r(\omega)} \Delta_{v\omega}; \quad [0, t_f] = \bigvee_{\omega=1}^{\ell+1} \Delta_{\omega}^* = \bigvee_{\omega=1}^{\ell+1} \left[\bigvee_{v=1}^{r(\omega)} \Delta_{v\omega} \right].$$

Причем для любого ω и любых $v \neq v'$ $\Delta_{v\omega} \cap \Delta_{v'\omega} = \emptyset$, так же и для любых $\omega \neq \omega'$ $\Delta_{\omega}^* \cap \Delta_{\omega'}^* = \emptyset$.

Натуральное число $r(\omega)$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$r(\omega) \geq 2,$$

$$\max_{0 \leq i \leq q} \max_{1 \leq v \leq r(\omega)} \max_{t \in \Delta_{v\omega}} |\lambda_i(t) - \lambda_{iv}^{\omega}| \leq \varepsilon,$$

где

$$\lambda_{iv}^{\omega} = \frac{1}{2} [\lambda_i(t_{v-1}^{\omega}) + \lambda_i(t_v^{\omega})].$$

Таким образом, ε определяется как наибольшее допустимое отклонение функции интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ от констант λ_{iv}^{ω} на интервалах дискретизации $\Delta_{v\omega}$ для всех v , $1 \leq v \leq r(\omega)$.

Тогда на Δ_{ω}^* система уравнений Колмогорова, описывающих рассматриваемую участвующую в конфликте систему $S_D(n, m, \bar{s})$ с динамическим резервированием, распадается на $r(\omega)$ систем уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} (p_{0v}^{\omega})' &= -D_{1v}^{*\omega} p_{0v}^{\omega}, \\ (p_{kv}^{\omega})' &= A_{kv}^{*\omega} p_{k-1,v}^{\omega} - D_{k+1,v}^{*\omega} p_{kv}^{\omega}, \\ k &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{2.22}$$

с начальными условиями для $\omega = 1$

$$p_{kv}^1(t_{v-1}^1) = \begin{cases} p_k(0), & \text{если } v = 1, \\ p_{k,v-1}^1(t_{v-1}^1), & \text{если } 2 \leq v \leq r(1) \end{cases}$$

и с начальными условиями

$$p_{kv}^\omega(t_{v-1}^\omega) = \begin{cases} p_{k,r(\omega-1)}^{\omega-1}, & \text{если } v = 1, \\ p_{k,v-1}^\omega(t_{v-1}^\omega), & \text{если } 2 \leq v \leq r(\omega) \end{cases}$$

для $2 \leq \omega \leq \ell$.

В системе уравнений (2.22) коэффициенты $A_{kv}^{*\omega}$ и $D_{kv}^{*\omega}$ соответственно равны

$$A_{kv}^{*\omega} = \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_{iv}^\omega,$$

$$D_{kv}^{*\omega} = \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_{iv}^\omega,$$

а величины $\alpha_i(k)$ и $\beta_i(k)$ вычисляются так же, как и в подразделе 1.2, с той лишь разницей, что коэффициент R_k , входящий в формулы, по которым они вычисляются, определяющий число возможных попаданий системы $S_D(n, m, \bar{s})$ в состояния с k отказавшими блоками, суммируется по целочисленному множеству

$$S_{\omega-1} = \left\{ \bar{s}_{\omega-1} \mid \sum_{i=1}^q s_{i,\omega-1} = m - \left[\sum_{k=0}^{m+1} k p_{k,r(\omega-1)}^{\omega-1}(\tau_{\omega-1}) \right]; \quad s_{i,\omega-1} \geq 0 \right\},$$

где

$$p_{k,r(0)}^0(\tau_0) = p_k(0).$$

Обозначим процедуру пп. 1–16 базового алгоритма 1.1 через $\Pi_2(\varepsilon; t_0, t_r)$, а алгоритм решения первой задачи в п. 2.5.1 через

$\Pi_3(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{\ell+1})$. Тогда вторую оптимизационную задачу можно решить при помощи следующего алгоритма.

АЛГОРИТМ 2.3

Начало.

1. Положить $\ell = 1$.
2. Вычислить $\zeta_\ell = \Pi_2(\varepsilon, \tau_{\ell-1}, \tau_{\ell+1})$.
3. Вычислить $\Delta\tau_\ell = (\tau_{\ell+1} - \tau_{\ell-1}) / \zeta_\ell$.
4. Положить $z = 1$.
5. Вычислить $\tau_\ell(z) = \tau_{\ell-1} + z / \Delta\tau_\ell$.
6. Выполнить $\Pi_3(\tau_{\ell-1}, \tau_\ell(z))$.
7. Положить $z = z + 1$.
8. Если $z \leq \zeta_\ell - 1$, идти к п. 5 данного алгоритма.
9. Вычислить z_ℓ , для которого

$$P(\tau_\ell(z_\ell)) = \max_{1 \leq z \leq \zeta_\ell - 1} P(\tau_\ell(z)).$$

10. Положить $\tau_\ell = \tau_\ell(z_\ell)$ и запомнить $\overline{s_{\ell-1}^0}$ и $\overline{s_\ell^0}$.
11. Положить $\ell = \ell + 1$.
12. Если $\ell \leq L$, идти к п. 2 данного алгоритма.
13. Конец ($\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L\}$ и $\{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_L^0}\}$ – искомые последовательности).

Приведенные численные алгоритмы 2.2 и 2.3 легко реализуются на профессиональных ПЭВМ и позволяют оперативно находить оптимальное распределение резервных элементов в атакуемой системе $S_D(n, m, \bar{s})$, гарантирующей ей оптимизацию функциональной надежности в конфликтной ситуации.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ ИЗБЫТОЧНЫХ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ПОСЛЕ ОТКАЗОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

3.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОТИВОБОРСТВУЮЩИХ СИСТЕМ

В данном разделе книги в качестве конфликтующих сторон будем рассматривать две идентичные по структуре аппаратно-избыточные технические системы, содержащие основные и резервные компоненты (блоки), подключаемые вместо отказавших основных, для восстановления функциональных возможностей соответствующей системы, участвующей в противоборстве. Каждая из участвующих в конфликте сторон в процессе противоборства систем стремится ослабить противодействующую систему, уменьшая вероятность ее безотказной работы путем целенаправленного воздействия (атаками) на ее компоненты, увеличивая интенсивность их отказов в течение времени взаимодействия.

В задачу каждой из противоборствующих сторон входит выбор оптимальной стратегии поведения в конфликтной ситуации с целью максимизации соответствующей функции выигрыша за счет оптимального использования резервных компонентов [35].

Будем полагать, что каждая из двух участвующих в конфликте систем $S^g(n, m, \bar{s})$, $g = 1, 2$ состоит из n ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_q$) основных и m ($m = s_1 + s_2 + \dots + s_q$) резервных блоков, разбитых на q групп, в каждой из которых возможна замена отказавших основных только резервными блоками из этой группы. При этом целочисленный вектор $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$, соответствующий распределению резервных блоков в q группах каждой из систем, будем называть вектором резервирования. В процессе противоборства вектор резервирования каждой из $S^g(n, m, \bar{s})$ -систем может целенаправленно изменяться в соответствующие моменты времени τ_i с целью перераспределения (настройки) резервных m блоков между q группами для максимизации вероятности безотказной работы соответствующей системы последовательно в моменты настройки и к моменту окончания противоборства. Вектор $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l)$, элементы которого соответствуют моментам перераспределения резервных блоков в соответствующей системе, будем в дальнейшем называть вектором настройки системы и считать, что перераспределение резервных блоков в системе, то есть восстановление работоспособности S^g – системы после отказов основных блоков в соответствующей q группе, и замена их резервными блоками из числа m происходят с интенсивностью $\mu^g(t)$. Отказ каждой из $S^g(n^g, m^g, \bar{s}^g)$ -систем наступает тогда, когда в системе откажет $m + 1$ блок.

3.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ S^g -СИСТЕМ

При постановке и решении задачи противоборства двух конфликтующих технических систем $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$, $g=1, 2$, восстанавливаемых после отказов, будем пользоваться в дальнейшем терминологией и понятиями теории игр [9, 18, 36].

Пусть системой $S^1(n^1, m^1, \overline{s^1})$ располагает и управляет игрок 1, а системой $S^2(n^2, m^2, \overline{s^2})$ располагает и управляет игрок 2. Как указано выше, системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$, $g=1, 2$, являются восстанавливаемыми после отказов с интенсивностями восстановления $\mu^g(t)$, одинаковыми для всех q групп соответствующей системы. Игрок 1 располагает множеством стратегий $W^1 = \{\overline{s^1}, \overline{\lambda^2}, \mu^1\}$, а игрок 2 располагает множеством стратегий $W^2 = \{\overline{s^2}, \overline{\lambda^1}, \mu^2\}$, где $\overline{s^g}$ – вектор резервирования g -го игрока; $\overline{\lambda^g}(t) = (\lambda_1^g(t), \lambda_2^g(t), \dots, \lambda_q^g(t))$ – вектор интенсивностей отказов в q группах системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ (в дальнейшем с целью упрощения систему $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ иногда будем обозначать S^g).

Как следует из приведенной постановки, стратегия W^g каждого игрока позволяет ему влиять на формирование вектора резервирования $\overline{s^g}$ собственной системы и на интенсивность отказов $\overline{\lambda^g}(t)$ противоборствующей системы, используя свои средства нападения, что определяется видом функций $\lambda_i^g(t), i=1, 2, \dots, q$. При этом рассматриваемая модель противоборства полагает, что игроки не могут влиять на интенсивность восстановления своей системы, которая определяется имеющимися техническими возможностями самой системы.

В [6] показано, что поведение восстанавливаемой системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ при аппроксимации марковским процессом описывается следующей системой уравнений Колмогорова:

$$\frac{dP_0^g(t)}{dt} = -C_1^g P_0^g(t) + \mu^g(t) P_1^g(t),$$

$$\frac{dP_k^g(t)}{dt} = A_k^g P_{k-1}^g(t) - (C_{k+1}^g + \mu^g(t)) P_k^g(t) + \mu^g(t) P_{k+1}^g(t), \quad 1 \leq k \leq m-1,$$

$$\frac{dP_m^g(t)}{dt} = A_m^g P_{m-1}^g(t) - (C_{m+1}^g + \mu^g(t)) P_m^g(t),$$

где $P_k^g(t)$ – вероятность нахождения системы S^g в состоянии с k отказами;

$P^g(t)$ – вероятность безотказной работы системы S^g в момент времени t .

A_k^g – интенсивность перехода системы S^g из состояния с $k-1$ отказами в состояние с k отказами;

C_k^g – суммарная интенсивность перехода системы S^g из состояния с k отказами в состояние с $k+1$ отказом и в поглощающее состояние.

Задачей каждой из противоборствующих систем является оптимизация восстановления после отказа очередного блока с целью максимизации вероятности безотказной работы системы в течение времени противоборства для максимального увеличения, в конечном итоге, среднего времени работы системы до отказа.

Сформулируем теперь рассматриваемую задачу противоборства в терминах теории оптимального управления [27].

Считая вектор-столбец

$$P^g(t) = \begin{pmatrix} P_0^g(t) \\ P_1^g(t) \\ \vdots \\ P_m^g(t) \end{pmatrix}$$

фазовым вектором, а $\overline{\mu^g(t)} = (\mu_1^g(t), \mu_2^g(t), \dots, \mu_q^g(t))$ – векторным управлением, получим уравнение управляемой системы

$$\frac{d}{dt} \overline{P^g(t)} = D^g(\overline{\mu^g(t)}) \overline{P^g(t)} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\overline{P^g(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $P^g(t)$ – вероятность безотказной работы системы S^g в течение времени t , а $\overline{\mu^g(t)} = (\mu_1^g(t), \mu_2^g(t), \dots, \mu_q^g(t))$ – вектор интенсивности восстановления после отказов блоков в q группах системы S^g , то есть векторное управление, а матрица $D^g(\overline{\mu^g(t)})$ имеет следующий вид:

$$D^g(\overline{\mu^g(t)}) = \begin{pmatrix} C_1^g & \mu^g & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_1^g & -(C_2^g + \mu^g) & \mu^g & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -(C_3^g + \mu^g) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^g & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(C_m^g + \mu^g) & \mu^g \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m^g & -(C_{m+1}^g + \mu^g) \end{pmatrix}.$$

Для численного решения рассматриваемой задачи обозначим через $P_k^g(t)$, $1 \leq k \leq m^g$, вероятность того, что в $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ -системе к моменту времени t произошло k отказов.

В дальнейшем будем считать, что число q групп для игроков 1 и 2 одинаково, то есть векторы $\overline{s^1}$ и $\overline{s^2}$ имеют одинаковую размерность q .

По определению [37] среднее время работы системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$, $g = 1, 2$, до отказа равно

$$T^g(S^g) = \int_0^{\infty} P^g(t) dt. \quad (3.3)$$

Однако, в связи с тем, что игра ограничена во времени $t \in [0, t_f]$, где t_f – время окончания игры, то при достаточно больших значениях t_f формулу (3.3) для вычисления приближенного значения среднего времени работы до отказа противоборствующей системы S^g можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} T^g(S^g) &\approx \int_0^{t_f} P^g(t) dt = \sum_{\sigma=1}^L \int_{t_{\sigma-1}}^{t_{\sigma}} P_{\sigma}^g(t) dt = \\ &= \sum_{\sigma=1}^L \int_{t_{\sigma-1}}^{t_{\sigma}} \left(\sum_{k=0}^{m^g} P_{k\sigma}^g(t) \right) dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где σ – номер интервала дискретизации, соответствующий моментам настройки τ_{σ}^g ($0 \leq \sigma \leq L$) системы S^g .

В процессе противоборства (игры) рассматриваемых систем положим, что игрок 1 старается максимизировать величину $T^1(S^1) - T^2(S^2)$, а игрок 2 старается минимизировать эту величину.

Будем считать, что за время игры t_f игрок $g(g=1,2)$ имеет право не более чем L ($L \geq 1$) раз изменять свой вектор резервирования $\overline{s^g}$, не считая момента $t=0$, управляемой им динамической системы $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$. Наконец, вектор $\overline{\tau^g} = (\tau_0^g, \tau_1^g, \dots, \tau_L^g)$, $\tau_0^g = 0$, назовем вектором настройки g -го игрока.

Очевидно, что $\tau_L^g < t_f$.

Итак, для исследования задачи противоборства двух систем $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ получена игра двух лиц с нулевой суммой с функцией выигрыша

$$K(z_1, z_2) = T^1(S^1(z_1)) - T^2(S^2(z_2)),$$

где $z_g \in W^g$ – стратегия g -го игрока ($g=1,2$) из множества возможных стратегий W^g ; $T^g(S^g(z_g))$ – время работы соответствующей противоборствующей системе до отказа при выборе g -м игроком стратегии Z_g .

Величина $T^g(S^g(z_g))$ вычисляется как корень уравнения $F_g(t) = 0$, где

$$F_g(t) = (m^g + 1) - \left[\sum_{k=0}^{m^g+1} k P_k^g(t) \right].$$

Решение этого уравнения описано в [6].

3.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ S^g -СИСТЕМ

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом дискретизации. Будем полагать, что каждому моменту настройки τ_σ^g ($0 \leq \sigma \leq L$) системы S^g соответствует вектор резервирования $\overline{s}_\sigma^g = (s_{\sigma 1}^g, s_{\sigma 2}^g, \dots, s_{\sigma q}^g)$. Введем интервалы настройки $\Delta\tau_\sigma^g = [\tau_\sigma^g, \tau_{\sigma+1}^g]$, причем $\tau_{L+1}^g = t_f$. Функции интенсивности отказов $\lambda^g(t)$ и интенсивности восстановления $\mu^g(t)$ будем считать кусочно-постоянными на интервалах дискретизации с возможными точками разрыва первого рода в моментах настройки.

Для $t \in \Delta\tau_\sigma^1$ обозначим $\overline{\lambda}^2(t) = (\lambda_{\sigma 1}^2, \dots, \lambda_{\sigma q}^2)$ и $\mu^1(t) = \mu_\sigma^1$, а для $t \in \Delta\tau_\sigma^2$ обозначим $\overline{\lambda}^1(t) = (\lambda_{\sigma 1}^1, \dots, \lambda_{\sigma q}^1)$ и $\mu^2(t) = \mu_\sigma^2$.

Таким образом, игрок 1, управляющий системой S^1 , получает множество стратегий $W^1 = \{\overline{\tau}^1, C^1, \Lambda^2, \overline{\mu}^1\}$, где $\overline{\tau}^1$ – вектор настройки игрока 1; C^1 – матрица, составленная из координат векторов резервирования $\overline{s}_\sigma^1$,

$$C^1 = \begin{vmatrix} s_{01}^1 & s_{02}^1 & \dots & s_{0q}^1 \\ s_{11}^1 & s_{12}^1 & \dots & s_{1q}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{L1}^1 & s_{L2}^1 & \dots & s_{Lq}^1 \end{vmatrix} (L+1) \times q;$$

Λ^2 – матрица, составленная из координат векторов $\overline{\lambda}_\sigma^2$:

$$\Lambda^2 = \begin{vmatrix} \lambda_{01}^2 & \lambda_{02}^2 & \dots & \lambda_{0q}^2 \\ \lambda_{11}^2 & \lambda_{12}^2 & \dots & \lambda_{1q}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{L1}^2 & \lambda_{L2}^2 & \dots & \lambda_{Lq}^2 \end{vmatrix} (L+1) \times q;$$

$\overline{\mu}^1$ – вектор интенсивности восстановления: $\overline{\mu}^1 = (\mu_0^1, \mu_1^1, \dots, \mu_L^1)$.

Для игрока 2, управляющего системой S^2 , множество стратегий $W^2 = \{\bar{\tau}^2, C^2, \Lambda^1, \bar{\mu}^2\}$ строится аналогично.

Введем теперь последовательность $\{t_0, t_1, \dots, t_{2L+1}\}$, которая получается объединением последовательностей $\{\tau_0^1, \tau_1^1, \dots, \tau_{L+1}^1\}$ и $\{\tau_0^2, \tau_1^2, \dots, \tau_{L+1}^2\}$, элементы в которой расположены в порядке возрастания. Ясно, что $t_0 = 0$, а $t_{2L+1} = t_f$.

Обозначим $\Delta t_\sigma = [t_\sigma, t_{\sigma+1}[$.

Таким образом, исходя из уравнений (3.1) и (3.2), получим дифференциальную игру между двумя системами $S^g(n^g, m^g, \bar{s}^g)$, описываемую уравнениями

$$\frac{d\bar{P}^1}{dt} = D^1[\bar{s}^1, \bar{\lambda}^1(t), \bar{\mu}^1(t)] \bar{P}^1, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\bar{P}^2}{dt} = D^2[\bar{s}^2, \bar{\lambda}^2(t), \bar{\mu}^2(t)] \bar{P}^2,$$

с начальными условиями

$$\bar{P}^1(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}_{(m^1+1)}, \quad \bar{P}^2(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}_{(m^2+1)}, \quad (3.6)$$

где

$$\bar{P}^g(t) = \begin{vmatrix} P_0^g(t) \\ P_1^g(t) \\ \vdots \\ P_{m^g}^g(t) \end{vmatrix}_{(m^g+1)} -$$

вектор-столбец размерности $(m^g + 1)$; D^g – матрица размерности $(m^g + 1) \times (m^g + 1)$, определенная выше.

Очевидно, что $P^g(t) = \sum_{k=0}^{m^g} P_k^g(t)$, $(g = 1, 2)$.

Метод решение уравнений, подобных (3.5), для оптимального восстановления работоспособности противоборствующей системы после отказов, обеспечивающий оптимизацию вероятности безотказной работы S^g -системы, приведен в [6].

Управления игроков систем S^g , участвующих в игре, подчиним следующим ограничениям.

$$1. \quad \max_{0 \leq \sigma \leq L} \max_{0 \leq i \leq q} \lambda_{\sigma i}^g \leq M_g. \quad (3.7)$$

Данное условие показывает, что ресурсы нападения игроков ограничены.

$$2. \quad \min_{0 \leq \sigma \leq L} (\tau_{\sigma+1}^n - \tau_{\sigma}^n) \geq \alpha_g. \quad (3.8)$$

Это условие запрещает каждому игроку делать две последовательные настройки «слишком быстро».

$$3. \quad \mu_{\sigma}^2 + \sum_{i=0}^q \lambda_{\sigma i}^1 = b_{1\sigma}; \quad \mu_{\sigma}^1 + \sum_{i=0}^q \lambda_{\sigma i}^2 = b_{2\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq L. \quad (3.9)$$

Данное условие отражает тот факт, что в любой момент времени невозможно превосходить соперника и в нападении, и в защите, и что сумма своих ресурсов нападения и защиты каждому игроку в любой момент времени известна.

$$4. \quad \sum_{i=1}^q s_{\sigma i}^g = m^g - \varphi_{\sigma}^g, \quad 0 \leq \sigma \leq L, \quad (3.10)$$

где $\varphi^g \left[\sum_{k=0}^{m^g+1} k P_{k\ell}^g(\tau_\sigma^g) \right]$ – математическое ожидание числа отказавших резервных элементов в S^g -системе, а число ℓ и величина $P_{m^g+1,\ell}^g(\tau_\sigma^g)$ находятся соответственно из условий

$$t_\ell = \tau_\sigma^g,$$

$$P_{m^g+1,\ell}^g(\tau_\sigma^g) = 1 - \sum_{k=0}^{m^g} P_{k\ell}^g(\tau_\sigma^g).$$

Четвертое условие (3.10) указывает, что к моменту настройки τ_σ^g количество резервных элементов игрока g уменьшается на величину φ_σ^g , представляющую собой математическое ожидание числа отказавших элементов в S^g -системе.

Из формулы (3.9) вытекает, что $\mu_\sigma^g = b_\sigma^{\tilde{g}} - \sum_{i=0}^q \lambda_{\sigma i}^{\tilde{g}}, 0 \leq \sigma \leq L,$

где $\tilde{g} = \begin{cases} 1, & \text{если } g = 2, \\ 0, & \text{если } g = 1. \end{cases}$

Теперь множество стратегий игроков, управляющих системами S^g , можно сузить так, что для g -го игрока $\tilde{W}^g = \{\overline{\tau^g}, \overline{C^g}, \overline{\lambda^g}\}$.

Покажем, что рассматриваемая дифференциальная игра между двумя системами $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ сводится к матричной игре.

Пусть $a = \min\{a_1, a_2\}$. На интервале $[0, t_f[$ введем множество $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, \omega\alpha\}$, где $\omega = [t_f / \alpha - 1]$. Далее, пусть точность определения управления $\overline{\lambda^g}(t)$ равна ε_g . Тогда каждая координата вектора $\overline{\lambda^g}(t)$ может принимать $[M_g / \varepsilon_g] + 1$ значений.

Последовательность моментов настроек $\{\tau_1^g, \tau_2^g, \dots, \tau_L^g\}$ на точках множества χ можно распределить $\binom{\omega}{L}$ способами.

Таким образом, для g -го игрока существует

$$\psi_g = \binom{\omega}{L} \left(\left\lceil \frac{M_g}{\varepsilon_g} \right\rceil + 1 \right)^L \prod_{\sigma=1}^L d(\varphi_{\sigma}^g) \quad (g=1, 2);$$

стратегий, где $d(\varphi_{\sigma}^g)$ – число целых неотрицательных решений уравнения (3.10).

$$\text{Известно [38], что } d(\varphi_{\sigma}^g) = \binom{q + m^g - \varphi_{\sigma}^g - 1}{m^g - \varphi_{\sigma}^g}.$$

Итак, рассматриваемая дифференциальная игра двух систем $S^g(n^g, m^g, \overline{s^g})$ свелась к матричной игре $(K(\tilde{z}_{1i}, \tilde{z}_{2j}))$ размерности $\psi_1 \times \psi_2$, где $\tilde{z}_{1i} \in \tilde{W}^1$ – i -я стратегия игрока 1, $\tilde{z}_{2j} \in \tilde{W}^2$ – j -я стратегия игрока 2. Более того, обозначив $\alpha_{ij} = K(\tilde{z}_{1i}, \tilde{z}_{2j})$, получим нормальную форму матричной игры $A = (\alpha_{ij})$ без ограничений на стратегии игроков, так как все ограничения (3.7)–(3.10) учтены при построении матрицы A и множеств $\tilde{W}^1, \tilde{W}^2$.

Как известно [18], нормальная форма матричной игры всегда имеет решение, если не в чистых, то в смешанных стратегиях.

Будем искать решение матричной игры A в смешанных стратегиях, так как выяснить существование седловой точки в матрице A практически невозможно даже для небольших чисел ω, L и достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Для решения применим метод фиктивного разыгрывания [18], который по существу является имитацией многократного повторения игры. В соответствии с этим методом определяются две последовательности векторов $\{\overline{X^{\alpha}}\}, \{\overline{Y^{\alpha}}\}$ следующим образом.

Первоначально

$$X_i^0 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$Y_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Далее, действуя по индукции, полагают, что $\overline{X^{\alpha-1}}$ и $\overline{Y^{\alpha-1}}$ выбраны и найдены такие i и j , что $k(\alpha)=i$ максимизирует $\sum_{j=1}^{\psi_2} \alpha_{ij} Y_j^{\alpha-1}$, а $c(\alpha)=j$ минимизирует $\sum_{i=1}^{\psi_1} \alpha_{ij} X_i^{\alpha-1}$.

Если существует набор решений, при которых указанные выше выражения достигают максимума или минимума, то любую из этих стратегий (максимизирующую или минимизирующую) можно взять в качестве решения [18].

$$\text{При этом} \quad X_i^\alpha = \begin{cases} X_i^{\alpha-1}, & \text{если } i \neq k(\alpha), \\ X_i^{\alpha-1} + 1, & \text{если } i = k(\alpha), \end{cases} \quad (3.11)$$

$$Y_j^\alpha = \begin{cases} Y_j^{\alpha-1}, & \text{если } j \neq c(\alpha), \\ Y_j^{\alpha-1} + 1, & \text{если } j = c(\alpha). \end{cases} \quad (3.12)$$

Две последовательности векторов определяют стратегии $\overline{x^\alpha}$ и $\overline{y^\alpha}$:

$$\overline{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overline{X^\alpha}, \quad \overline{y^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overline{Y^\alpha}.$$

Очевидно, что при $\alpha \geq 1$ стратегии $\overline{x^\alpha}$ и $\overline{y^\alpha}$ будут смешанными.

Как отмечено в [18], не существует никаких гарантий, что последовательность $\{\overline{x^\alpha}\}$ или $\{\overline{y^\alpha}\}$ сходится, но поскольку она лежит в компактном множестве стратегий, то она должна содержать сходящуюся последовательность. Предел любой сходящейся последовательности $\{\overline{x^\alpha}\}$ и $\{\overline{y^\alpha}\}$ является оптимальной стратегией.

Данный метод требует большого числа итераций, но итерации достаточно простые и удобны для программирования.

3.4. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ S^g -СИСТЕМ

На основании изложенного предлагается следующий алгоритм решения поставленной задачи противоборства двух технических, восстанавливаемых после отказов S^g -систем, который не трудно реализовать на современных профессиональных персональных ЭВМ.

АЛГОРИТМ 3.1

Начало.

1. Задать $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_1, a_2, M_1, M_2, t_f, L, \{b_{1\sigma}\}, \{b_{2\sigma}\}, 0 \leq \sigma \leq L$.
2. Вычислить $\alpha = \min \{\alpha_1, \alpha_2\}$ и $\omega = [t_f / \alpha - 1]$.
3. Сформировать множество $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, \omega\alpha\}$.
4. Задать вектор $\overline{\tau^g} = \{\tau_0^g, \tau_1^g, \dots, \tau_L^g\}, g = 1, 2$, где $\tau_\sigma^g \in \chi$.

5. Задать матрицу $\Lambda^g = (\lambda_{\sigma i}^g)$, $g = 1, 2$, $0 \leq \sigma \leq L$, $1 \leq i \leq q$, где $\lambda_{\sigma i}^g = v_{\sigma i}^g \varepsilon_g$, а $v_{\sigma i}^g \in \{0, 1, 2, \dots, [M_g]\}$.

6. Вычислить $\overline{\mu^g}$, $g = 1, 2$, по формулам (3.9).

7. Вычислить целочисленное неотрицательное решение $\overline{s^g}$, $g = 1, 2$, уравнения (3.10).

8. Вычислить $T^1(S^1(z_1))$ и $T^2(S^2(z_2))$ как корни уравнения $F_g(t) = 0$, $g = 1, 2$.

9. Вычислить $\alpha_{ij} = T^1(S^1(z_1)) - T^2(S^2(z_2))$.

10. Выполнить процедуру пп. 7–8 для всех целых неотрицательных решений $\overline{s^1}, \overline{s^2}$ уравнения (3.10).

11. Выполнить процедуру пп. 5–10 для всевозможных комбинаций $v_{\sigma i}^g \in \{0, 1, 2, \dots, [M_g]\}$, $g = 1, 2$.

12. Выполнить процедуру пп. 4–11 для всевозможных $\overline{\tau^g}$, $g = 1, 2$, где $\tau_{\sigma}^g \in \chi$, $0 \leq \sigma \leq L$.

13. Сформировать матрицу $A = (\alpha_{ij})_{\psi_1 \times \psi_2}$.

14. Задать число $\varepsilon > 0$ (точность решения).

15. Положить $\overline{X^0} = \overline{0}$, $\overline{Y^0} = \overline{0}$.

16. Положить $\alpha = 1$.

17. Вычислить $k(\alpha) = i$, максимизирующее $\sum_{j=1}^{\psi_2} a_{ij} Y_j^{\alpha-1}$; $c(\alpha) = j$,

минимизирующее $\sum_{i=1}^{\psi_1} a_{ij} X_i^{\alpha-1}$.

18. Вычислить $\overline{X^{\alpha}}$, $\overline{Y^{\alpha}}$ по формулам (3.11) и (3.12).

19. Вычислить $\overline{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overline{X^\alpha}$, $\overline{y^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \overline{Y^\alpha}$, считая, что $\overline{x^0} = \overline{X^0}$, $\overline{y^0} = \overline{Y^0}$.

20. Если $\| \overline{x^\alpha} - \overline{x^{\alpha-1}} \| + \| \overline{y^\alpha} - \overline{y^{\alpha-1}} \| < \varepsilon$, идти к п. 23.

Здесь $\| \overline{x} \|$ – евклидова норма вектора $\overline{x}$.

21. Положить $\alpha = \alpha + 1$.

22. Идти к п. 17.

23. Конец ($\overline{x^\alpha}$, $\overline{y^\alpha}$ – оптимальные стратегии).

В приведенном алгоритме сам метод фиктивного разыгрывания [18] описан в процедуре пп. 15–23.

4. КОНФЛИКТЫ И ПРОТИВОБОРСТВО ПОДВИЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В последнее время в силу целого ряда объективных причин приобрели актуальность задачи, связанные с разработкой математических моделей и алгоритмов управления сложными техническими подвижными системами (подвижными объектами) в конфликтных ситуациях, когда подвижный объект за счет собственных ресурсов выполняет функции и нападения и защиты. В известных работах при разработке моделей поведения подвижных объектов в конфликтной ситуации практически не учитывалась физическая структура подвижного объекта, включающая основные и резервные компоненты, что характерно для современных подвижных объектов, являющихся сложными техническими системами, и методы самозащиты атакуемых подвижных объектов в процессе конфликта.

В данном разделе книги сделана попытка в какой-то мере восполнить указанный выше пробел и дать практически реализуемые на компьютере численные алгоритмы оптимального управления нападающими и самозащищающимися подвижными объектами в конфликтной ситуации, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы противоборствующего объекта.

В дальнейшем понятия «подвижный объект» и «подвижная система» будем считать синонимами и использовать, максимально возможно, введенные ранее обозначения и понятия.

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМОЙ, УПРАВЛЯЕМОЙ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ

Будем рассматривать задачу, когда подвижная система, участвующая в конфликтной ситуации, в течение времени конфликта и положения в пространстве должна защищаться за счет собственных ресурсов – средств защиты (как правило – избыточности) от воздействия другой из участвующих в конфликте сторон, стремящейся своими средствами нападения увеличить вероятность отказа подвижного объекта в течение конфликта в пространстве взаимодействия, то есть уменьшить надежность каналов связи подвижного объекта с системой его управления и надежность аппаратных компонентов подвижного объекта (подвижной системы).

Таким образом, в качестве причины отказа, участвующего в конфликтной ситуации управляемого подвижного объекта, являются отказы его аппаратных компонентов, отказы каналов связи системы управления и особенности свойств пространства, в котором перемещается управляемый объект, на которые оказывает соответствующее влияние противоположная конфликтующая сторона.

В общем виде рассматриваемая в данном подразделе задача может быть описана на содержательном уровне следующим образом [39].

Для участвующей в конфликтной ситуации перемещающейся в пространстве в заданную точку аппаратно резервированной структурно-перестраиваемой системы, управляемой по каналом связи, интенсивности отказов компонентов которой и каналов

связи являются функциями времени и точки пространства, в которой находится подвижная система, определить оптимальные траектории движения системы, вектор моментов настройки системы для самозащиты и векторы резервирования, обеспечивающие максимизацию вероятности безотказной работы конфликтующей подвижной системы в заданной точке пространства.

4.1.1. Формализация объекта исследования и постановка задачи

Будем считать, что участвующий в конфликтной ситуации подвижный объект представляет собой управляемую по каналам связи перемещающуюся в трехмерном евклидовом пространстве R^3 избыточную $S_{\Pi}(n, m, \bar{s}, q, \lambda(t, \bar{r}), \bar{\tau})$ -систему, состоящую из n основных модулей, разбитых на q групп по $n_1, n_2, \dots, n_q$ ($n_i \geq 1$) модулей в каждой. Интенсивности отказов модулей, входящих в соответствующую группу $\lambda_1(t, \bar{r}), \lambda_2(t, \bar{r}), \dots, \lambda_q(t, \bar{r})$, являются функциями времени и точки пространства, в котором находится система. В состав подвижной системы входят, по числу основных, q групп резервных модулей по $s_1, s_2, \dots, s_q$ ($s_i \geq 0$) модулей в каждой группе $s_1 + s_2 + \dots + s_q = m$ интенсивность отказов каждого из которых также является функцией времени и точки пространства $\lambda_0(t, \bar{r})$. В каждой q -й группе основные модули при их отказе мгновенно замещаются резервными из этой же группы. Как только резервный модуль подключается вместо отказавшего основного в своей группе, он начинает функционировать с интенсивностью отказов $\lambda_i(t, \bar{r})$, ($1 \leq i \leq q$).

Считаем, что вектор резервирования $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ является переменным во времени, т. е. в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell$ по командам может происходить перераспределение резервных модулей между группами, которое, так же как и выше, назовем настройкой системы, а соответствующие моменты времени $\tau_\sigma (1 \leq \sigma \leq L)$ – моментами настройки и, соответственно, $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ – вектором настройки. Каждому моменту настройки τ_σ соответствует вектор резервирования $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$. Количество настроек за время движения системы t_f ограничено числом $L (L \geq 0)$.

В рассматриваемой подвижной системе каждая i -я группа модулей ($1 \leq i \leq q$) получает управляющие сигналы из центра управления, размещенного, например, в начале координат пространства, в котором движется система, по N_i каналам связи. Причем отказ в каждой группе Q_i каналов связи из N_i ($Q_i < N_i$) еще не приводит к отказу системы управления i -й группы модулей подвижной системы, а отказ $Q_i + 1$ каналов связи приводит к ее отказу.

Пусть $\Lambda_i(t, \bar{\tau})$ – интенсивность отказов на единицу длины одного канала связи i -й группы модулей системы S_{Π} , которую назовем удельной интенсивностью отказов i -й группы каналов связи и будем использовать при разработке алгоритмов оптимального управления подвижной системой в конфликтной ситуации.

Решаемая задача может быть формально сформулирована следующим образом.

При заданных $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{r})$, $(0 \leq i \leq q)$ и $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \bar{r})$ $(1 \leq i \leq q)$ для системы $S_{\Pi}(n, m, \bar{s}, q, \lambda(t, \bar{r}), \bar{\tau}, \Lambda(t, \bar{r}), N_i, Q_i)$, участвующей в конфликтной ситуации, разработать алгоритм оптимального управления, включающий алгоритмы вычисления траектории ее движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$, вектора настройки $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L\}$ и векторов резервирования $\bar{s}_{\sigma} = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$, $(0 \leq \sigma \leq L)$, отвечающих моментам настройки τ_{σ} , максимизирующим вероятность безотказной работы $P(t_f)$ подвижной конфликтующей системы в момент t_f прибытия ее в заданную точку $\bar{r}_f$ пространства. То есть решить задачу оптимизации выбора траектории и пространственно временной стратегии резервирования избыточной подвижной системы, участвующей в конфликте, с целью максимизации ее вероятности безотказной работы $P(t_f)$ при движении по выбранной траектории, включая конечную точку движения [40].

В приведенной выше постановке рассматриваемая задача сводится к задаче оптимального управления подвижной системой S_{Π} , где (в терминах теории оптимального управления [27]) в качестве максимизируемого функционала качества управления является $P(t_f)$, в качестве управления используются $\bar{r}, \bar{\tau}, \bar{s}_{\sigma}$, в качестве внешнего воздействия на систему используются $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{r})$, $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \bar{r})$, при ограничениях $1 \leq i \leq q$, $0 \leq \sigma \leq L$ и естественных ограничениях на параметры движения подвижной S_{Π} -системы, которые приведены ниже.

4.1.2. Решение поставленной задачи

Положим, что S_{Π} -система из начала координат должна попасть в заданную конечную точку $\bar{r}_f$ пространства R^3 . Время движения системы t_f зависит от траектории и имеет естественное ограничение $t_f \leq T$, указывающее на то, что время движения (полета) ограничено.

Введем следующие ограничения для подвижной системы.

В связи с тем, что прочностные характеристики аппаратной части подвижной системы всегда ограничены, должно соблюдаться условие

$$|\ddot{\bar{r}}(t)| \leq M \quad \text{для любого } t \in [0, t_f]. \quad (4.1)$$

Из неравенства (4.1) следует, что для любого $t \in [0, t_f]$

$$|\dot{\bar{r}}(t)| \leq Mt + v_0; \quad |\bar{r}(t)| \leq \frac{Mt^2}{2} + v_0 t, \quad (4.2)$$

где v_0 – начальная скорость части подвижной системы.

Последнее ограничение на траекторию движения подвижной системы:

$$|\bar{r}(t)| \in V \quad \text{для любого } t \in [0, t_f], \quad (4.3)$$

где V – заданная область конечной связности в R^3 (ясно, что $\bar{0} \in V$ и $\bar{r}_f \in V$).

Это ограничение «запрещает» для траектории некоторые односвязные области пространства.

Чтобы завершить построение математической модели управляемой подвижной S_{Π} -системы, воспользуемся следующим

приемом. Вместо каналов связи подвижной системы с центром управления введем в каждый i -й аппаратный основной модуль n_i системы переменное число фиксированных элементов $\tilde{n}_i(t, \bar{r})$ и в каждую i -ю группу резервных модулей – Q_i фиктивных элементов.

Проведя такую замену, удалось избавиться от каналов связи и получить новую $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ -систему с переменным числом элементов в основном и резервном модулях, где

$$n^1(t, \bar{r}) = n + \tilde{n}_1(t, \bar{r}) + \tilde{n}_2(t, \bar{r}) + \dots + \tilde{n}_q(t, \bar{r}),$$

$$m^1 = m + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_q.$$

Число элементов $\tilde{n}_i(t, \bar{r})$ определяется из уравнения

$$N_i \Lambda_i(t, \bar{r}) \big| \bar{r} \big| = \tilde{n}_i(t, \bar{r}) \lambda_i(t, \bar{r}) + Q_i(t, \bar{r}) \lambda_0(t, \bar{r}). \quad (4.4)$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{n}_i(t, \bar{r})$ – натуральное число (опуская при записи аргументы), получим

$$\tilde{n}_i = \left[\frac{N_i \Lambda_i \big| \bar{r} \big| - Q_i \lambda_0}{\lambda_i} \right] + 1, \quad 1 \leq i \leq q, \quad (4.5)$$

где $[X]$ – ближайшее натуральное число, меньшее X .

Легко понять, что физический смысл уравнения (4.4) состоит в том, что суммарная интенсивность отказов каналов связи i -го модуля «перекладывается» на i -й модуль аппаратной части подвижной системы.

Будем полагать, что поведение участвующей в конфликте подвижной $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ -системы может быть аппроксимировано марковским случайным процессом с конечным числом со-

стояний, соответствующих числу отказов в системе. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих однородный марковский процесс, соответствующий функционированию подвижной S_{Π}^* -системы, имеет вид [6]

$$\begin{aligned} p'_0(t, \bar{r}) &= -D_1 p_0(t, \bar{r}), \\ p'_k(t, \bar{r}) &= A_k p_{k-1}(t, \bar{r}) - D_{k+1} p_k(t, \bar{r}), \\ 1 \leq k \leq m^1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

с начальными условиями

$$p_0(0) = 0, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{m^1}(0) = 0, \quad (4.7)$$

где $p_k(t, \bar{r})$ – вероятность пребывания подвижной S_{Π}^* -системы в момент времени t в состояниях с k отказами.

При этом

$$\begin{aligned} D_k &= A_k + B_k, \quad 1 \leq k \leq m^1, \\ D_{m^1+1} &= B_{m^1+1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты системы уравнений (4.6) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=0}^q \alpha_i(k) \lambda_i(t, \bar{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1, \\ D_k &= \sum_{i=0}^q \beta_i(k) \lambda_i(t, \bar{r}), \quad 1 \leq k \leq m^1 + 1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где для $0 \leq k \leq m^1$ имеет место

$$\alpha_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1) \tilde{R}_k, & \text{если } i = 0, \\ \delta_i n_i \tilde{R}_k, & \text{если } 0 \leq i \leq q; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\beta_i(k) = \begin{cases} (m^1 - k + 1)\tilde{R}_k, & \text{если } i = 0, \\ \delta_i n_i \tilde{R}_k - n_i^1 \Theta_i(k), & \text{если } 1 \leq i \leq q, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\beta_i(m^1 + 1) = \delta_i n_i, \quad 1 \leq i \leq q,$$

$$\tilde{R}_k = \binom{n^1 + m^1}{k} R_k.$$

Коэффициенты δ_i и $\Theta_i(k)$, являющиеся элементами векторов $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q)$ и $\bar{\Theta}(k) = (\Theta_1(k), \Theta_2(k), \dots, \Theta_q(k))$, определяются следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } s_i = 0, \\ 1, & \text{если } s_i \geq 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\Theta_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq s_i, \\ 1, & \text{если } k \geq s_i + 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Очевидно, что $\Theta_i(1) = 1 - \delta_i$.

Переменная R_k определяет число возможных попаданий конфликтующей подвижной системы $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ в состояние с k отказами и вычисляется [6] по формуле

$$R_k = \sum_{\bar{v} \in \Omega(k, \bar{s})} \prod_{i=1}^q \binom{n_i^1 + s_i}{v_i}, \quad (4.13)$$

где $\Omega(k, \bar{s}) = \{\bar{v} \mid v_1 + v_2 + \dots + v_q = k; \quad \forall_i \ 0 \leq v_i \leq s_i + Q_i\}$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_q)$ – целочисленный вектор, представляющий сумму целочисленных векторов ($\bar{v} = \bar{x} + \bar{z}$), $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ и $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_q)$.

Выражение (4.13) получено в предположении, что k отказов в рассматриваемой подвижной системе распределены следую-

щим образом: в i -й группе основных модулей $n^1 - x_i$ отказов, в i -й группе резервных модулей $m^1 - z_i$ отказов ($1 \leq i \leq q$). Если $x_i = 0$ или $z_i = 0$, то в соответствующей группе отказов не было.

Очевидно, что аналитическое решение поставленной задачи оптимального управления, участвующей в конфликтной ситуации подвижной $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ -системой, не представляется возможным, поэтому воспользуемся приближенным численным методом для решения данной задачи, основанным на методе дискретизации, подробно рассмотренном выше и в [41].

Суть этого метода, применительно к рассматриваемой задаче, состоит в том, что систему дифференциальных уравнений (4.6), коэффициенты которой являются функциями времени и точки пространства, в которой находится подвижная система, необходимо заменить системой дискретных аналогов, у которых коэффициенты можно рассматривать как постоянные (с заранее установленной степенью точности) на дискретных интервалах времени и пространства, в котором движется участвующая в конфликтной ситуации S_{Π}^* -система.

Для численного решения задачи прежде всего получим оценку t_f .

Из второго неравенства (4.2) следует

$$|\bar{r}(t_f)| = |\bar{r}_f| \leq M t_f^2 / 2 + v_0 t_f.$$

Отсюда имеем

$$t_f \geq \frac{1}{M} (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\bar{r}_f|}). \quad (4.14)$$

Обозначим правую часть неравенства (4.14) через $t_f^{\min}$. Ясно, что $t_f^{\min} \leq T$.

На вектор настройки $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$ из физических соображений естественно наложить следующее ограничение:

$$\min_{0 \leq \delta \leq L-1} (\tau_{\delta+1} - \tau_{\delta}) \geq \alpha,$$

смысл которого заключается в том, что две последовательные настройки подвижной системы $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ нельзя производить слишком быстро, между ними должно пройти некоторое время, не меньше α .

Обозначим теперь через e точность измерения траектории $\bar{r}(t)$ движения системы S_{Π}^* , при которой становится заметно, когда в какой-либо окрестности любой точки $t \in [0, t_f]$ траектория начинает отклоняться от касательной, проходящей через точку $\bar{r}(t_0)$. Используя величину e , нетрудно вычислить временной интервал дискретизации Δt .

Для этого разложим вектор-функцию $\bar{r} = \bar{r}(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t_0 \in [0, t_f]$ и ограничимся двумя членами:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \dot{\bar{r}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\bar{r}}(t_0)(t - t_0)^2.$$

Отсюда ясно, что траектория $\bar{r}(t)$ в окрестности точки t_0 не будет отличаться от касательной с точностью e , если

$$|\ddot{\bar{r}}(t_0)|(t - t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Исходя из выражения (4.1) следует, что это неравенство выполняется наверное, если выполняется неравенство

$$M(t - t_0)^2 / 2 \leq e.$$

Отсюда следует, что за временной интервал дискретизации можно принять

$$\Delta t = \sqrt{2e/M}. \quad (4.15)$$

При этом из физических соображений ясно, что $\Delta t < \alpha$, так как в малой окрестности любой точки $\bar{r} \in R^3$ пространство можно считать изотропным, а настройка подвижной систем S_{Π}^* необходима только тогда, когда изотропность существенно нарушается.

Теперь, на основании (4.15), t_f может принимать дискретные значения

$$t_f = t_f^{\min} + \ell \Delta t, \text{ где } 0 \leq \ell \leq \tilde{\ell}, \text{ а } \tilde{\ell} = [(T - t_f^{\min}) / \Delta].$$

Координаты вектора настройки S_{Π}^* -системы $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, \omega\alpha\}$ могут принимать значения из дискретного множества $\chi = \{0, \alpha, 2\alpha, \dots, \omega\alpha\}$, где $\bar{\omega} = [t_f / \alpha]$.

Ясно, что $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_L < \tau_f$. Каждому моменту настройки τ_{σ} отвечает вектор резервирования $\bar{s}_{\sigma} = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$, $0 \leq \sigma \leq L$.

Обозначим через $t_{\omega} = \omega\alpha$, $0 \leq \omega \leq \bar{\omega}$. Тогда вектор настройки $\bar{\tau}$ будет описываться вектором натуральных чисел $\bar{\omega} = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(L))$ через отображение $\tau_{\sigma} \rightarrow \omega(\sigma)$, при этом $\omega(0) = 0$.

Обозначим $\Delta_{\sigma} = [\omega(\sigma)\alpha, \omega(\sigma+1)\alpha[$, $0 \leq \sigma \leq L-1$, и $t_{\nu}^{\sigma} = t_{\omega(\sigma)} + \nu\Delta t$, где $0 \leq \nu < \tilde{\nu}(\sigma)$, а $\tilde{\nu}(\sigma) = (\omega(\sigma+1) - \omega(\sigma))[\alpha / \Delta t]$ и введем множество $\Delta_{\nu\sigma} = [t_{\nu-1}^{\sigma}, t_{\nu}^{\sigma}[$, $1 \leq \nu \leq \tilde{\nu}(\sigma)$.

Очевидно, что

$$\Delta_{\sigma} = \bigcup_{v=1}^{\tilde{\nu}(\sigma)} \Delta_{v\sigma};$$

$$[0, t_f] = \left(\bigcup_{\sigma=0}^L \Delta_{\sigma} \right) \cup [\omega(L)\alpha, t_f],$$

причем для любых $\sigma \neq \sigma'$ $\Delta_{\sigma} \cap \Delta_{\sigma'} = \emptyset$, для любых $v \neq v'$ и любого σ справедливо $\Delta_{v\sigma} \cap \Delta_{v'\sigma} = \emptyset$.

Теперь система уравнений (4.6) с начальными условиями (4.7), описывающая поведение подвижной системы $S_{\Pi}^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$, разобьется на $K(t_f)$ систем уравнений с постоянными коэффициентами A_{kv}^{σ} и D_{kv}^{σ} по числу множеств $\Delta_{v\sigma}$, где

$$K(t_f) = \sum_{\sigma=0}^L \nu(\sigma),$$

которые являются дискретным аналогом системы уравнений (4.6),

$$(p_{0v}^{\sigma})' = -D_{1v}^{\sigma} p_{0v}^{\sigma},$$

$$(p_{kv}^{\sigma})' = A_{kv}^{\sigma} p_{k-1,v}^{\sigma} - D_{k+1,v}^{\sigma} p_{kv}^{\sigma}, \quad 1 \leq k \leq m^1, \quad (4.16)$$

с начальными условиями [6]

$$p_{kv}^{\sigma}(t_{v-1}^{\sigma}) = \begin{cases} p_{k,r(\sigma-1)}^{\sigma-1}(\tau_{\sigma-1}), & \text{если } v=1, \\ p_{k,v-1}^{\sigma}(t_{v-1}^{\sigma}), & \text{если } 2 \leq v \leq d(\sigma), \end{cases} \quad (4.17)$$

для $2 \leq \sigma \leq l$

и

$$p_{kv}^1(t_{v-1}^1) = \begin{cases} p_{k0}(0), & \text{если } v=1, \\ p_{k,v-1}^1(t_{v-1}^1), & \text{если } 2 \leq v \leq d(1), \end{cases} \quad (4.18)$$

для $\sigma = 1$,

где $d(\sigma)$ – натуральное число.

Коэффициенты A_{kv}^σ и D_{kv}^σ определяются по формулам (4.8)–(4.13) с соответствующими изменениями, о которых говорилось выше. В частности, вместо n_i будет $n_i + \tilde{n}_i(t_v^\sigma, \bar{r})$, а вместо λ_i будет λ_{iv} .

Теперь проведем операцию дискретизации пространства, в котором перемещается участвующая в конфликтной ситуации система S_Π^* -система.

Допустим, что движущаяся система S_Π^* в момент времени $t = t_0$ попала в точку пространства $\bar{r}_0 = \bar{r}$. Требуется определить радиус $\rho = \rho(\Delta t)$ максимального шара $U(\bar{r}_0, \Delta t)$ с центром в точке $\bar{r}_0$, за который подвижная система не выйдет за время Δt . Этот шар является пространственным аналогом элемента временной дискретизации.

Для этого решим дифференциальное неравенство $|\ddot{\bar{r}}(t)| \leq M$ с начальными условиями $\bar{r}(t_0) = \bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}}(t_0) = \dot{\bar{r}}_0$.

Получим $|\bar{r}(t) - \bar{r}_0| \leq |\dot{\bar{r}}_0|(t - t_0) + M(t - t_0)^2 / 2 - Mt_0(t - t_0)$.

Отсюда, учитывая первое из неравенств (4.2), получим

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}_0| \leq (v_0 + \frac{M}{2}(t - t_0))(t - t_0).$$

Следовательно,

$$\rho(\Delta t) = \left(v_0 + \frac{M}{2} \Delta t \right) \Delta t. \quad (4.19)$$

Дискретизацию $\lambda_i = \lambda_i(t, \bar{r})$, $0 \leq i \leq q$ и $\Lambda_i = \Lambda_i(t, \bar{r})$, $1 \leq i \leq q$, проведем, руководствуясь следующими соображениями.

Из построения множества $\Delta_{v\sigma}$ ясно, что для любого $t \in [0, t_f]$ всегда можно найти такие σ и v , что $t \in \Delta_{v\sigma}$. Выше было показано, что для любого $\bar{r} \in R^3$ шар $U(\bar{r}, \Delta t) = \{\bar{r}' \mid |\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho(\Delta t)\}$ является пространственным интервалом дискретизации.

Функции λ_i и Λ_i отображают четырехмерное евклидово пространство $R^4 = R_t^1 \otimes R^3$ на R^1 , где $R_t^1 = \{t \mid t \in [0, \infty[\}$, а R^3 – физическое трехмерное пространство, в котором перемещается система S_{Π}^* . Элементом дискретизации в пространстве R^4 является четырехмерный шар $|\bar{r}' - \bar{r}|^2 + t^2 \leq \rho^2 + (\Delta t)^2$, объем которого $u(\gamma)$, где $\gamma = U(\bar{r}, \Delta t) \otimes \Delta_{v\sigma}$, вычисляется по формуле $u(\gamma) = \pi^2(\rho^2 + (\Delta t)^2)^2 / 2$.

Теперь интенсивности отказов на элементе дискретизации γ можно определить как средние интегральные:

$$\lambda_{iv}^{\sigma} = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^{\sigma}}^{t_v^{\sigma}} dt \int_{|\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho} \lambda_i(t, \bar{r}') du', \quad (4.20)$$

$$\Lambda_{iv}^{\sigma} = (u(\gamma))^{-1} \int_{t_{v-1}^{\sigma}}^{t_v^{\sigma}} dt \int_{|\bar{r}' - \bar{r}| \leq \rho} \Lambda_i(t, \bar{r}') du', \quad (4.21)$$

где $\bar{r}(x_1, x_2, x_3)$, $du = dx_1 dx_2 dx_3$.

Будем рассматривать R^3 как ячеистую структуру с узлами в точках $\bar{r}(\bar{i}) = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1 = e i_1$, $x_2 = e i_2$, $x_3 = e i_3$, а $\bar{i} = (i_1, i_2, i_3)$ – целочисленный вектор. Будем также считать, что подвижная система S_{Π}^* наблюдается и корректируется только в точках $\bar{r}(\bar{i})$, что не противоречит реальности.

Установим, для каких векторов $\bar{i}$ рассматриваемая система не выйдет за пределы шара $U(\bar{r}_0, \Delta t)$.

Пусть вектору $\bar{r}_0$ отвечает целочисленный вектор $\bar{i}^0 = (i_1^0, i_2^0, i_3^0)$. Тогда очевидно, что для всех $\bar{i} = (i_1, i_2, i_3)$, удовлетворяющих неравенству

$$(i_1 - i_1^0)^2 + (i_2 - i_2^0)^2 + (i_3 - i_3^0)^2 \leq \left(\frac{\rho}{e}\right)^2, \quad (4.22)$$

точка $\bar{r}(\bar{i}) \in U(\bar{r}_0, \Delta t)$.

Теперь после проведенной дискретизации с учетом (4.20) и (4.21) формула (4.5) принимает вид

$$\tilde{n}_i = \left\lceil \frac{N_i \Lambda_{iv}^\sigma |\bar{r}| - Q_i \lambda_{0v}^\sigma}{\lambda_{iv}^\sigma} \right\rceil + 1 \quad (4.23)$$

для $t \in \Delta_{v\sigma}$.

Выполнив дискретизацию компонентов рассматриваемой задачи, перейдем к вычислению управлений, максимизирующих вероятность безотказной работы $P(t_f)$ подвижной конфликтующей системы $S_\Pi^*(n^1(t, \bar{r}), m^1, \bar{s})$ в момент t_f достижения системой заданной точки $\bar{r}_f$ пространства.

Для этого необходимо вычислить управления

$\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L)$ и

$$S = \begin{bmatrix} s_{01} & s_{02} & \cdots & s_{0q} \\ s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L1} & s_{L2} & \cdots & s_{Lq} \end{bmatrix}$$

матрицы, строки которой составлены из последовательности координат векторов резервирования $\bar{s}$, максимизирующих $P(t_f)$. При этом задача максимизации $P(t_f)$ для фиксированных $\bar{\tau}$ и S , то есть выбор оптимальной траектории $\bar{r}(t)$, эквивалентна задаче максимизации $P(t_f)$ в любой точке $t \in [0, t_f]$. Этот факт доказан в [6].

4.1.3. Алгоритм численного решения задачи

В рассматриваемой задаче $P(t_f)$ представляет функционал качества управления S_{Π}^* -системой. Обозначим его через $P[\bar{\tau}, S, \bar{r}(t); t]$, где $\bar{\tau}, S, \bar{r}(t)$ – управления. Тогда алгоритм численного решения данной задачи, в котором использован принцип последовательной оптимизации (процедура пп. 20–29 алгоритма), можно описать следующим образом.

АЛГОРИТМ 4.1

Начало.

1. Задать $n, m, q, \{n_1, n_2, \dots, n_q\}, \{\lambda_0(t, \bar{r}), \lambda_1(t, \bar{r}), \dots, \lambda_q(t, \bar{r})\},$
 $\{\Lambda_1(t, \bar{r}), \Lambda_2(t, \bar{r}), \dots, \Lambda_q(t, \bar{r})\}, \{N_1, N_2, \dots, N_q\}, \{Q_1, Q_2, \dots, Q_q\},$
 $L, T, M, v_0, a, e, \bar{r}_f$, множество V .
2. Вычислить $t_f^{\min} = \frac{1}{M} \left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2M|\bar{r}_f|} \right).$
3. Вычислить $\Delta t = \sqrt{2e/M}.$
4. Вычислить $\tilde{l} = [(T - t_f^{\min}) / \Delta t].$
5. Вычислить $\rho = (v_0 + M\Delta t / 2)\Delta t.$

6. Положить $j = 0$.
7. Вычислить $t_f = t_f^{\min} + j\Delta t$.
8. Вычислить $\tilde{\omega} = [t_f / \alpha]$.
9. Для всех векторов $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_L)$, где $\tau_\sigma \in \chi$, выполнить процедуру пп. 10–25.
10. Положить $\sigma = 0$.
11. Положить $\bar{i}_0 = 0$.
12. Положить $\Pi = \emptyset$.
13. Вычислить $z = \omega(\sigma) + v$.
14. Вычислить $\lambda_{iv}^\sigma, \Lambda_{iv}^\sigma$ для всех $0 \leq i \leq q$ ($\Lambda_{0v}^\sigma = 0$) по формулам (4.20) и (4.21) соответственно.
15. Вычислить $\tilde{n}_i$, $1 \leq i \leq q$ по формуле (4.23).
16. Для всех натуральных решений $\bar{s}_\sigma = (s_{\sigma 1}, s_{\sigma 2}, \dots, s_{\sigma q})$ диафантова уравнения

$$s_{\sigma 1} + s_{\sigma 2} + \dots + s_{\sigma q} = m + \sum_{i=1}^q Q_i - \left[\sum_{k=0}^{m^1} k p_{k, \omega(\sigma)}^\sigma(\tau_\sigma) \right],$$

где $p_{kv}^\sigma(t)$ – решение системы уравнений (4.16) с начальными условиями (4.17), (4.18), выполнить процедуру пп. 17–20.

17. Для всех целочисленных векторов $\bar{i} = (i_1, i_2, i_3) \in I_z$, где $I_z = I_z^1 \cap I_z^2 \cap \tilde{V}$, а множества $I_z^1, I_z^2, \tilde{V}$ определяются следующим образом:

$$I_z^1 = \{\bar{i} \mid \|\bar{i} - \bar{i}_{z-1}\| \leq \rho / e\},$$

$$I_z^2 = \left\{ \bar{i} \mid \|\bar{i}_f - \bar{i}\| \leq \frac{1}{e} (Mt_f + v_0)(t_f - t_v^\sigma) \right\};$$

$$\tilde{V} = \{\bar{i} \mid e\bar{i} \in V\}, \quad \text{а} \quad \bar{r}_f = e\bar{i}_f,$$

выполнить процедуру пп. 18–19.

18. Если $I_z = \emptyset$, идти к п. 27.

19. Вычислить

$$P_j[\bar{\tau}_\sigma, \{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\}, \bar{r}(t_{v+1}^\sigma)] = \sum_{k=0}^{m^1} p_{kv}^\sigma(t_{v+1}^\sigma),$$

где $\bar{r}(t_{v+1}^\sigma) = e\bar{i}$, $\tau_\sigma = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_\sigma)$, а принцип вычисления векторов $\overline{s_\mu^0}$, $0 \leq \mu \leq \sigma - 1$, описывается в п. 21 этого алгоритма (ясно, что для $\sigma = 0$ $\{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\} = \{\overline{s_0^0}\}$).

20. Вычислить вектор $\bar{i}_z \in I_z$ для которого

$$\begin{aligned} P_j[\bar{\tau}_\sigma \{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\}, \bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] = \\ = \max_{\bar{i} \in I_z} P_j[\bar{\tau}_\sigma \{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\}, \bar{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma], \end{aligned}$$

где $\bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma) = e\bar{i}_z$.

21. Вычислить вектор $\overline{s_\sigma^0}$, для которого

$$\begin{aligned} P_j[\bar{\tau}_\sigma \{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\}, \bar{r}^0(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma] = \\ = \max_{\overline{s_\sigma^0}} P_j[\bar{\tau}_\sigma \{\overline{s_0^0}, \overline{s_1^0}, \dots, \overline{s_{\sigma-1}^0}, \overline{s_\sigma^0}\}, \bar{r}(t_{v+1}^\sigma); t_{v+1}^\sigma]. \end{aligned}$$

22. Положить $v = v + 1$.

23. Если $v \leq \tilde{v}(\sigma)$, идти к п. 13.

24. Положить $\sigma = \sigma + 1$.

25. Если $\sigma \leq L$, идти к п. 11.

26. Вычислить вектор $\bar{\tau}_L^0$, для которого

$$P_j[\bar{\tau}_L^0, \overline{S^0}, \bar{r}^0(t_f); t_f] = \max_{\bar{\tau}_L} P_j[\bar{\tau}_L^0, \overline{S^0}, \bar{r}^0(t_f); t_f],$$

где S^0 – матрица, строки которой составлены из последовательных координат векторов $\bar{s}_0^0, \bar{s}_1^0, \dots, \bar{s}_L^0$.

27. Положить $j = j + 1$.

28. Если $j \leq \tilde{l}$, идти к п. 7.

29. Вычислить $\tilde{j}$, для которого

$$P_j[\bar{\tau}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_f); t_f] = \max_{0 \leq j \leq \tilde{l}} P_j[\bar{\tau}_L^0, S^0, \bar{r}^0(t_f); t_f].$$

30. Конец (управление $\{\bar{\tau}, S, \bar{r}(t)\}$, где величины

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_L^0, \quad S = S^0, \quad \bar{r}(t) = e\bar{i}_z$$

для $t \in \Delta_{v\sigma}$ соответствуют индексу $\tilde{j}$, является оптимальным).

4.2. ПРОТИВОБОРСТВО (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА)

МЕЖДУ ПОДВИЖНЫМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

В данном подразделе разработаны математическая модель и алгоритм для решения игровой задачи типа «нападение-защита» для двух игроков, располагающих подвижными (нападающими) и неподвижными (защищающимися) объектами (системами) соответственно. При этом при приближении подвижного объекта к неподвижному на определенное расстояние противоборствующие системы начинают целенаправленно воздействовать друг на друга, увеличивая интенсивность отказов компонентов системы противника, то есть уменьшать функциональную надежность соответствующей противоборствующей системы [6].

Дифференциальная игра между противоборствующими объектами сведена к минимаксной игре в смешанных стратегиях с функцией выигрыша, равной разности сумм вероятностей безотказной работы объектов нападения и объектов защиты в течение времени игры. При этом множеством стратегий, для выбора из них оптимальной, для нападающего игрока является набор траекторий перемещения подвижных объектов к местам нападения, а множеством стратегий для защищающегося игрока, для выбора из них оптимальной, является целенаправленный выбор места расположения объектов защиты в заданной области расположения защищающихся – неподвижных объектов.

Рассмотрим следующую игру двух лиц. Игрок 1 располагает L управляемыми объектами, находящимися в начальных точках $\bar{r}_{k0}, 1 \leq k \leq L$. Игрок 2 располагает N единицами защиты, которые он может расставлять в заданной области Γ , причем $\bar{r}_{k0} \in \Gamma$. Игрок 1 старается поразить k -м управляемым объектом ($1 \leq k \leq L$) заданную точку $\bar{r}_{kf} \in \Gamma$, которую защищает игрок 2, а игрок 2 старается помешать этому. Обозначим через t_{kf} время полёта k -го объекта от точки $\bar{r}_{k0}$ до $\bar{r}_{kf}$. Число t_{kf} зависит от траектории $\bar{r}_k = \bar{r}_k(t)$, выбираемой k -м объектом, причем $\bar{r}_k(0) = \bar{r}_{k0}$, $\bar{r}_k(t_f) = \bar{r}_{kf}$.

На траектории $\bar{r}_k = \bar{r}_k(t)$ наложим очевидные ограничения:

$$t_{kf} \leq T_k, \quad (4.24)$$

$$|\ddot{\bar{r}}_k(t)| \leq M_k \text{ для любого } t \in [0, t_{kf}]. \quad (4.25)$$

Неравенство (4.24) диктуется ресурсом двигателя, которым располагает k -й подвижный объект, управляемый игроком 1; неравенство (4.25) отражает прочностные характеристики k -го подвижного объекта.

Из (4.25) следует, что для любого $t \in [0, t_{kf}]$

$$\left| \dot{\bar{r}}_k(t) \right| \leq M_k t + v_{k0}, \quad (4.26)$$

$$\left| \bar{r}_k(t) \right| \leq M_k t^2 / 2 + v_{k0} t,$$

где v_0 – начальная скорость подвижного объекта.

Введем, наконец, последнее ограничение на траектории:

$$\bar{r}_k(t) \in V \text{ для любого } t \in [0, t_{kf}], \quad (4.27)$$

где V – заданная конечносвязная область в R^3 , причем $\bar{r}_{k0}(t) \in V$ и $\Gamma \subset V$. Это ограничение «запрещает» для траектории некоторые односвязные области пространства.

Пусть далее множество пунктов защиты игрока 2 может быть расположено в Q точках ($N \leq Q$) с заданными координатами $\bar{c}_i = (c_{1i}, c_{2i}, c_{3i})$, $1 \leq i \leq Q$. Обозначим множество $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_Q\}$ через C .

Итак, игроки 1 и 2 обладают каждый L $S_q[1, \lambda_{kq}(t, \bar{r}_k)]$ -системами соответственно ($q=1, 2$), поведение которых, при аппроксимации марковским процессом, описывается уравнениями

$$p'_{k1} = -\lambda_{k1}(t, \bar{r}_k) p_{k1}, \quad 1 \leq k \leq L, \quad (4.28)$$

$$p'_{k2} = -\lambda_{k2}(t, \bar{r}_k) p_{k2}$$

с начальными условиями $p_{k1}(0) = p_{k2}(0) = 1$,

где $p_{kq}(t)$ – вероятность безотказной работы k -й S_q -системы, принадлежащей q -му игроку ($1 \leq k \leq L; q = 1, 2$) к моменту времени t , а $\lambda_{kq}(t, \bar{r}_k)$ – интенсивность отказов этой системы, где $\bar{r}_k = \bar{r}_k(t)$ – траектория k -го объекта, управляемого игроком 1.

Интенсивности отказов систем зададим следующим образом:

$$\lambda_{k1}(t, \bar{r}_k) = \lambda_k(t, \bar{r}_k) + \sum_{i=1}^N \frac{b_i(|\bar{r}_k - \bar{c}_i^*|)}{|\bar{r}_k - \bar{c}_i^*|^{\alpha(\bar{c}_i^*)}},$$

$$\lambda_{k2}(t, \bar{r}_k) = \frac{b_{k2}}{|\bar{r}_k - \bar{r}_{kf}|^{\beta_k}},$$

где $\lambda_k(t, \bar{r}_k)$ – интенсивность отказов k -го подвижного объекта, определяемая объективными факторами; $C^* = \{\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*, \dots, \bar{c}_N^*\}$ – некоторые подмножества множества C (пункты защиты игрока 2); $\{\alpha(\bar{c}_i^*)\}$ – заданная последовательность действительных чисел, отвечающая множеству C^* , элементы которой определяются физико-географическими или иными особенностями точки $\bar{c}_i^*$; $\{b_{k2}\}$ и $\{\beta_k\}$ – заданные последовательности действительных чисел, элементы которых определяются физико-географическими или иными особенностями точек $\bar{r}_{kf}$, подлежащих защите, и типом k -го подвижного объекта;

$$b_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > \gamma_i, \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq \gamma_i, \end{cases}$$

где γ_i – дальность действия пункта защиты $\bar{c}_i^*$ игрока 2.

Интенсивность отказов $\lambda_{k1}(t, \bar{r}_k)$ можно представить в виде

$$\lambda_{k1}(t, \bar{r}_k) = \lambda_k(t, \bar{r}_k) + \sum_{i=1}^Q \frac{\delta_i b_i(|\bar{r}_k - \bar{c}_i^*|)}{|\bar{r}_k - \bar{c}_i^*|^{\alpha_i}},$$

где $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_Q)$ – вектор, определяемый следующим образом:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если в точке } \bar{c}_i \text{ нет пункта защиты,} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а $\alpha_i = \alpha(\bar{c}_i)$.

В качестве функции выигрыша возьмем

$$K[z_1, z_2] = \sum_{k=1}^L p_{k1}(t_{kf}) - \sum_{k=1}^L p_{k2}(t_{kf}),$$

где $z_q \in W^q$, а W^q – множества стратегий q -го игрока ($q = 1, 2$).

Ясно, что

$$W^1 = \{\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \dots, \bar{r}_L(t)\},$$

$$W^2 = \{\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_R\},$$

где

$$R = \binom{Q}{N}.$$

Далее, обозначим $\nu_{k0} = |\bar{r}_k(0)|$ и ε – точность измерения траектории $\bar{r}_k = \bar{r}_k(t)$, при которой становится заметно отклонение траектории от касательной в окрестности произвольной точки $t_0 \in [0, t_{kf}]$.

Теперь для решения задачи можно применить аппарат дискретизации, разработанный в [6] для решения подобных задач.

За временной интервал дискретизации возьмем число $\Delta t = \sqrt{2\varepsilon/M}$, где

$$M = \max \{M_1, M_2, \dots, M_L\}.$$

Получим оценки для t_{kf} .

Очевидно, что

$$|\bar{r}_k(t_f)| = |\bar{r}_{kf}| \leq \frac{M_k t_{kf}^2}{2} + v_{k0} t_{kf}.$$

$$\text{Отсюда следует } t_{kf} \geq \frac{1}{M_k} \left(-v_{k0} + \sqrt{v_{k0}^2 + 2M_k |\bar{r}_{kf}|} \right).$$

Пространственным аналогом временного интервала дискретизации будет шар радиусом $\rho(\Delta t)$,

$$\text{где } \rho(\Delta t) = (v_0 + \tilde{M} \Delta t / 2) \Delta t;$$

$$v_0 = \min \{v_{10}, v_{20}, \dots, v_{L0}\}; \quad \tilde{M} = \min \{M_1, M_2, \dots, M_L\}.$$

Решением задачи является вычисление стратегий $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, для которых

$$K[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] \min_{z_2} \max_{z_1} K[z_1, z_2].$$

За основу приведенного ниже алгоритма для решения этой задачи принят разработанный в [42] алгоритм.

АЛГОРИТМ 4.2

Начало.

1. Задать $\{\lambda_1(t, \bar{r}); \lambda_2(t, \bar{r}), \dots, \lambda_L(t, \bar{r})\}; \{v_{10}, v_{20}, \dots, v_{L0}\}; \{\bar{r}_{10}, \bar{r}_{20}, \dots, \bar{r}_{L0}\};$
 $\{M_1, M_2, \dots, M_L\}; \{T_1, T_2, \dots, T_L\}; \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_Q\}; \{b_{12}, b_{22}, \dots, b_{L2}\};$
 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L\}; \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_Q\}; \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q\}; \varepsilon, N, V.$

2. Вычислить Δt ; $\rho(\Delta t)$ по приведенным выше формулам.

3. Вычислить

$$t_{kf}^{\min} = \frac{1}{M_k} \left(-v_{k0} + \sqrt{v_{k0}^2 + 2M_k |\bar{r}_{kf}|} \right), \quad 1 \leq k \leq L.$$

4. Вычислить

$$\tilde{\ell}_k = [(\Gamma_k - t_{kf}^{\min}) / \Delta t], \quad 1 \leq k \leq L.$$

5. Выполнить процедуру пп. 6–24 данного алгоритма для всех векторов $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_Q)$, где $\delta_i = 0,1$ и $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_Q = N$, $1 \leq i \leq Q$.

6. Положить $k = 1$.

7. Положить $j = 0$.

8. Вычислить $t_{kf} = t_{kf}^{\min} + j \Delta t$.

9. Положить $\bar{i}_0 = 0$.

10. Положить $v = 1$.

11. Положить $n = v$.

12. Вычислить λ_{k1}^v , λ_{k2}^v по формулам

$$\lambda_{kq}^v = \left(\frac{\pi^2 (\rho^2 + (\Delta t)^2)^2}{2} \right)^{-1} \int_{t_{v-1}}^{t_v} dt \int_{|\bar{r} - \bar{r}_k| \leq \rho} \lambda_{kq}(t, \bar{r}) dv,$$

где $t_v = v \Delta t$; $t_0 = 0$; $\bar{r}_k = \varepsilon \bar{i}_{n-1}$; $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$;

$$dv = dx_1, dx_2, dx_3; \quad q = 1, 2.$$

13. Для всех целочисленных векторов $\bar{i} = (i_1, i_2, t_3) \in I_n$, где $I_n = I_n^1 \cap I_n^2 \cap \tilde{V}$, а множества $I_n^1, I_n^2, \tilde{V}$ определяются следующим образом:

$$I_n^1 = \left\{ \bar{i} \left| \left| \bar{i} - \bar{i}_{n-1} \right| \leq \frac{\rho}{\varepsilon} \right. \right\};$$

$$I_n^1 = \left\{ \bar{i} \left| \left| \bar{i}_{kf} - \bar{i} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} (M_k t_{kf} + v_{k0}) (t_{kf} - t_v) \right. \right\};$$

$$\tilde{V} = \{i \mid \varepsilon i \in V\}; \quad \bar{r}_{kf} = \varepsilon \bar{i}_{kf},$$

выполнить процедуру пп. 14–15 данного алгоритма.

14. Если $I_n = \emptyset$, идти к п. 19.

15. Вычислить $K_j[r_k(t_v)] = \rho_{k1}^v(t_v) - \rho_{k2}^v(t_v)$,

где $\rho_{kq}^v(t_v) = \rho_{kq}^v(t_{v-1}) \exp(-\lambda_{kq}^v \Delta t)$, $q = 1, 2$;

$$\rho_{kq}^v(t_{v-1}) = \rho_{kq}^{v-1}(t_{v-1});$$

$$\rho_{kq}^0(0) = 1, \quad \bar{r}(t_v) = \varepsilon \bar{i}.$$

16. Вычислить вектор $\bar{i}_n \in I_n$, для которого

$$K_j[\bar{r}_{kn}(t_v)] = \max_{\bar{i} \in I_n} K_j[\bar{r}_k(t_v)],$$

$$\bar{r}_{kn}(t_v) = \varepsilon \bar{i}_n.$$

17. Положить $v = v + 1$.

18. Если $t_v \leq t_{kf}$, идти к п. 11.

19. Положить $j = j + 1$.

20. Если $j \leq \tilde{\ell}_k$, идти к п. 8.

21. Вычислить $\tilde{j}$, для которого

$$K_{\tilde{j}}[\bar{r}_k(t_{kf})] = \max_{0 \leq j \leq \ell_k} K_j[\bar{r}_k(t_{kf})].$$

22. Положить $k = k + 1$.

23. Если $k \leq L$, идти к п. 7.

24. Вычислить

$$G[\bar{\delta}] = \sum_{k=1}^L K_{\bar{j}}[\bar{r}_k(t_{kf})].$$

25. Вычислить $\bar{\delta}_0$, для которого

$$G[\bar{\delta}] = \min_{\bar{\delta}} G[\bar{\delta}].$$

26. Конец $\bar{\delta}_0$ и $\{\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \dots, \bar{r}_L(t)\}$ – искомые оптимальные стратегии.

В пояснение к алгоритму 4.2 заметим, что $\rho_{kq}^v(t)$ в п. 15 есть решение уравнений

$$(\rho_{kq}^v)' = -\lambda_{kq}^v \rho_{kq}^v; q = 1, 2$$

с начальными условиями $\rho_{kq}^v(t_{v-1}) = \rho_{kq}^{v-1}(t_{v-1})$, которые являются дискретными аналогами уравнений (4.28), описывающих игру, на интервалах дискретизации [6].

4.3. ПРОТИВОБОРСТВО (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА) МЕЖДУ ПОДВИЖНЫМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Используя (по возможности) систему обозначений и основные положения, изложенные в подразделе 4.2 данной работы, развивая эти положения, рассмотрим следующую игровую задачу противоборства между подвижными управляемыми объектами.

Игроки 1 и 2, участвующие в игре, располагают L_1 и L_2 подвижными объектами (системами) соответственно, которые в начале игры находятся в точках $\bar{r}_{k0}^1$, $1 \leq k \leq L_1$, и $\bar{r}_{k0}^2$, $1 \leq k \leq L_2$, пространства противоборства. В дальнейшем под понятиями

«подвижный объект» и «подвижная система» будем понимать одно и то же – противоборствующий объект. Обозначим через t_{kf} время движения (полета) k -го объекта, управляемого q -м игроком, $q = 1, 2$, от точки $\bar{r}_{k0}^q$, до точки $\bar{r}_{kf}^q$. Очевидно, что число t_{kf} (время движения k -го объекта) зависит от траектории $\bar{r}_k^q = \bar{r}_k^q(t)$, выбираемой в процессе игры q -м игроком для управления k -м подвижным объектом, причем $\bar{r}_k^q(0) = \bar{r}_{k0}^q$ и $\bar{r}_k^q(t_f) = \bar{r}_{kf}^q$. На траектории всех подвижных объектов $\bar{r}_k^q(t)$, $q = 1, 2$; $1 \leq k \leq L_q$, и законы их движения наложим те же ограничения, что и в подразделе 4.2.

Противоборствующие стороны начинают динамически активно воздействовать друг на друга при приближении k -го объекта, управляемого q -м игроком, к подвижному объекту противника на расстояние дальности активного взаимодействия, используя для этого соответствующие механизмы воздействия на увеличение интенсивности отказов противоборствующей системы, то есть уменьшая вероятность ее безотказной работы (функциональную надежность), приводящую в конечном итоге к отказу системы в целом.

Обозначим через p_{kq} вероятность безотказной работы k -го подвижного объекта, управляемого q -м игроком; $q = 1, 2$; $1 \leq k \leq L_q$; через λ_{kq} – интенсивность отказов соответствующего k, q объекта. Тогда, при аппроксимации поведения противоборствующих подвижных объектов в процессе игры неоднородным марковским процессом [43], игра может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$p'_{kq}(t) = -\lambda_{kq} p_{kq}(t), \quad q = 1, 2 \quad (4.29)$$

с начальными условиями $p_{kq}(0) = 1$,

где

$$k = \begin{cases} 1, 2, \dots, L_1 & \text{при } q = 1, \\ 1, 2, \dots, L_2 & \text{при } q = 2, \end{cases}$$

а интенсивности отказов λ_{kq} определяются из указанных выше условий противоборства подвижных систем следующим образом:

$$\lambda_{k1} = \lambda_k^1(t, \bar{r}_k^1) + \sum_{i=1}^{L_2} \frac{b_{i2}(|\bar{r}_k^1 - \bar{r}_i^2|)}{|\bar{r}_k^1 - \bar{r}_i^2|^{\alpha(i,2)}}; \quad (4.30)$$

$$\lambda_{k2} = \lambda_k^2(t, \bar{r}_k^2) + \sum_{i=1}^{L_1} \frac{b_{i1}(|\bar{r}_k^2 - \bar{r}_i^1|)}{|\bar{r}_k^2 - \bar{r}_i^1|^{\alpha(i,1)}}, \quad (4.31)$$

при этом величина

$$b_{kq}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > \gamma_{kq}; \\ 1, & \text{если } x \leq \gamma_{kq}. \end{cases} \quad (4.32)$$

В приведенных выражениях (4.30), (4.31), (4.32):

γ_{kq} – дальность действия k -го объекта, управляемого q -м игроком в процессе взаимодействия с противником;

$\{\alpha(k,1)\}, \{\alpha(k,2)\}$ – заданные последовательности действительных чисел, где $\alpha(k, q)$ определяется типом k -го подвижного объекта, управляемого q -м игроком;

$\lambda_k^q(t, \bar{r}_k^q)$ – интенсивность отказов k -го объекта q -го игрока, определяемая объективными факторами: временем противоборства t , влияющим на старение системы, и траекторией движения $\bar{r}_k^q$ k -й системы, выбираемой q -м игроком в процессе противоборства с учетом имеющихся «препятствий» на пути движения системы;

$$\sum_{i=1}^{L_2} \frac{b_{i2} \left(\left| \bar{r}_k^1 - \bar{r}_i^2 \right| \right)}{\left| \bar{r}_k^1 - \bar{r}_i^2 \right|^{\alpha(i,2)}}; \quad \sum_{i=1}^{L_1} \frac{b_{i1} \left(\left| \bar{r}_k^2 - \bar{r}_i^1 \right| \right)}{\left| \bar{r}_k^2 - \bar{r}_i^1 \right|^{\alpha(i,1)}} - \text{интенсивности отказов, за-}$$

висящие от функции взаимодействия подвижных объектов игрока 1 с подвижными объектами игрока 2 и подвижных объектов игрока 2 с подвижными объектами игрока 1 соответственно в пределах дальности действия каждого противоборствующего объекта.

В связи с тем, что дифференциальные уравнения в системе уравнений (4.29) имеют переменные коэффициенты, поскольку интенсивность отказов противоборствующих систем зависит от многих переменных и изменяется в пространстве и времени, то получить аналитическое решение для вычисления безотказной работы p_{kq} каждого k -го подвижного объекта, $1 \leq k \leq L_q$, управляемого q -м ($q = 1, 2$) игроком, не представляется возможным.

Поэтому для решения системы дифференциальных уравнений (4.29) следует использовать математический аппарат метода дискретизации, разработанный для решения подобных задач в [6].

Очевидно, что в рассматриваемой задаче противоборства между подвижными объектами, описываемой дифференциальной игрой, множеством стратегий W^q q -го игрока является множество траекторий $\bar{r}_k^q(t)$ соответствующего подвижного объекта, участвующего в противоборстве, то есть

$$W^q = \{ \bar{r}_k^q(t) \mid 1 \leq k \leq L_q \}, \quad q = 1, 2.$$

В качестве функции выигрыша примем

$$K[z_1, z_2] = \sum_{k=1}^{L_1} p_{k1}(t_f) - \sum_{k=1}^{L_2} p_{k2}(t_f),$$

где $z_q \in W^q$, а t_f – заданное время игры.

Решением рассматриваемой задачи, так же как и в подразделе 4.2, является вычисление оптимальных стратегий $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$, для которых

$$K[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2] = \min_{z_2} \max_{z_1} K[z_1, z_2].$$

В результате дифференциальная игра сводится к матричной и ее решение ищется в смешанных стратегиях [18].

Алгоритм численного решения рассматриваемой задачи противоборства между подвижными управляемыми объектами в значительной мере совпадает с алгоритмом 4.2 противоборства подвижных и неподвижных объектов, разработанным в подразделе 4.2 данной работы, который может быть легко реализован на современных профессиональных персональных компьютерах. Для этого после ввода исходных данных выполняются процедуры пп. 2–4 и пп. 6–15, алгоритма 4.2 последовательно для $q = 1, 2$.

Очевидно, что рассматриваемая модель противоборства подвижных систем предусматривает возможность объединения нескольких подвижных объектов, управляемых одним игроком, для достижения единой цели.

Учитывая в настоящее время особую важность задач, рассмотренных в данном разделе, для использования их на практике были разработаны и зарегистрированы в Государственном фонде алгоритмов и программ для ЭВМ [44–46] программы, позволяющие находить и исследовать оптимальные стратегии пове-

дения противоборствующих подвижных объектов в конфликтных ситуациях. Один из разработанных программных комплексов для решения игровых задач противоборства двух игроков, располагающих подвижными и неподвижными объектами, и для игроков, располагающих подвижными управляемыми объектами, приведен в приложении к книге.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГОТОВНОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ К ПРОТИВОБОРСТВУ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ И ПРОДОЛЖЕНИЮ ПРОТИВОБОРСТВА ПОСЛЕ ОТКАЗОВ КОМПОНЕНТОВ СИСТЕМЫ

В предыдущих разделах книги при рассмотрении математических моделей и алгоритмов для решения задач противоборства технических систем в конфликтных ситуациях полагалось, что к началу конфликта техническая система полностью подготовлена к участию в противоборстве (отлажена, настроена, заправлена и т. п.), восстановление работоспособности системы после отказов основных блоков и замены их резервными происходит мгновенно. При этом, с целью упрощения рассматриваемых моделей, надежностью системы обнаружения отказа и подключения резервного блока вместо отказавшего пренебрегали. Это обычная практика для математических методов в теории надежности [25].

Однако в реальных условиях любая техническая система (электронная, механическая, комбинированная) проходит перед началом работы «предстартовую» подготовку, включающую отладку, настройку, загрузку программного обеспечения, подзарядку аккумуляторов, заправку топливом и другие подготовительные работы, обеспечивающие системе функциональную готовность для выполнения поставленной задачи. Очевидно, что в

ряде конкретных случаев, особенно при подготовке системы к противоборству в конфликтной ситуации, важное значение имеет увеличение интенсивности подготовки, ведущее в конечном итоге к сокращению общего времени приведения системы в состояние полной готовности.

При этом противник в определенных условиях может оказывать воздействие на процесс подготовки системы к противоборству, создавая различные виды помех, приводящие к уменьшению интенсивности подготовки, то есть к увеличению времени готовности системы к «старту».

Аналогичная ситуация, приводящая к еще более тяжелым последствиям, может иметь место при настройке – восстановлении работоспособности системы после отказов компонентов в процессе противоборства.

Сказанное выдвигает проблему разработки математических моделей для решения ряда задач вычисления функциональной готовности подготавливаемой и участвующей в конфликтной ситуации технической системы. Некоторые из таких задач, связанные с минимизацией времени подготовки и восстановления функциональных свойств системы после отказов в отсутствии и при наличии помех со стороны противника, рассматриваются в данном разделе книги. При этом полагается, что если время выполнения операций подготовки к работе технической системы и восстановления ее функциональных свойств после отказов компонентов в общем случае является случайной величиной, то и общее время подготовки технической системы к функционированию, то есть к выполнению поставленной задачи, будет также случайной величиной.

5.1. Модели для вычисления функциональной готовности технической системы при подготовке ее к противоборству в конфликтной ситуации и при восстановлении работоспособности после отказов компонентов в процессе противоборства при абсолютной надежности системы подготовки и восстановления

Под функциональной готовностью $P_{\text{ФГ}}(t)$ технической системы будем понимать вероятность того, что система окажется в работоспособном состоянии в произвольно выбранный момент времени после начала ее подготовки (настройки) к противоборству или восстановления после отказа соответствующего компонента [37].

Для простоты будем полагать, что процесс настройки или восстановления после отказа в соответствии с выбранным алгоритмом, т. е. процесс подготовки к функционированию технической системы, представляет собой линейную последовательность выполнения одной операции за другой. Очевидно, что на практике возможны и другие алгоритмы выполнения операций настройки технической системы, которые в данной работе не рассматриваются.

5.1.1. Решение задачи при отсутствии помех со стороны противника

Будем полагать, что рассматриваемый процесс подготовки технической системы к функционированию и восстановлению после отказов может быть аппроксимирован марковским случайным процессом с конечным числом состояний. Граф процесса подготовки к функционированию и восстановления после отка-

зов технической системы для случая линейной последовательности операций представлен на рис. 5.1.



Рис. 5.1. Граф процесса подготовки технической системы к функционированию и восстановлению после отказов при постоянных интенсивностях выполнения операции подготовки и восстановления

В приведенных на графе обозначениях $E_i (i = 0, 1, \dots, n)$ – состояние технической системы на i -м шаге процесса подготовки к функционированию (восстановлению после отказов); $\mu_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ – интенсивность выполнения i -й операции подготовки восстановления.

Обозначив через $p_i(t)$ вероятность нахождения системы в состоянии $E_i (i = 0, 1, \dots, n)$, нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих поведение рассматриваемой системы, в следующем виде:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\mu_0 p_0(t); \\ p'_k(t) &= \mu_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_k p_k(t); \\ k &= 1, 2, \dots, (n-1); \\ p'_n(t) &= \mu_{n-1} p_{n-1}(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Начальные условия имеют вид $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_n(0) = 0$. Очевидно, что $\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1$. Отсюда следует, что функ-

циональная готовность нейрокомпьютерной системы определяется выражением

$$P_{\Phi\Gamma}(t) = p_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t).$$

Выполняя в (5.1) преобразование Лапласа и полагая, что все μ_i ($0 \leq i \leq n-1$) различны, определим выражение для функциональной готовности системы следующим образом:

$$P_{\Phi\Gamma} = 1 - \prod_{\ell=0}^{n-1} \mu_{\ell} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\mu_i t}}{\mu_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (\mu_j - \mu_i)}, \quad \mu_i \neq 0.$$

Среднее время подготовки технической системы к функционированию в рассматриваемом случае имеет вид

$$T_{\Phi\Gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\mu_i}, \quad \mu_i \neq 0.$$

Приведенные выше формулы позволяют без каких-либо сложностей производить исследование с помощью персональных ЭВМ.

5.1.2. Решение задачи при наличии помех со стороны противника

Решение системы уравнений (5.1) при произвольных интенсивностях выполнения операций подготовки μ_i (в том числе равных между собой $\mu_i = \text{const}$ ($0 \leq i \leq n-1$)) с помощью ПЭВМ не представляет сложности. Однако в реальных условиях интенсив-

ности выполнения операций подготовки технической системы к работе в условиях конфликта могут быть не постоянными величинами, а изменяющимися (уменьшающимися) во времени, под воздействием помех, создаваемых противником, то есть на дугах графа, изображенного на рис. 5.1, вместо $\mu_i = \text{const}$ следует указывать реальные интенсивности переходов $\mu_i(t)$. Тогда система дифференциальных уравнений, соответствующая реальному в условиях воздействия помех противника процессу настройки или восстановления после отказов технической системы, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}p'_0(t) &= -\mu_0(t)p_0(t), \\p'_k(t) &= \mu_{k-1}(t)p_{k-1}(t) - \mu_k(t)p_k(t), \\k &= 1, 2, \dots, (n-1), \\p'_n(t) &= \mu_{n-1}(t)p_{n-1}(t).\end{aligned}\tag{5.2}$$

В подразделе 1.3 было показано, что приближенное решение с заданной точностью подобных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами возможно методом дискретизации и даны примеры решения таких систем уравнений. В данной работе для решения рассматриваемой задачи воспользуемся изложенным в [47] методом определения закона распределения времени перехода системы из нулевого состояния в поглощающее путем замены реальной динамической системы статистически эквивалентной.

Известно [47], что модель реальной динамической системы с переменными во времени интенсивностями переходов можно приближенно представить моделью, статистически эквивалент-

ной на фиксированном интервале времени (τ, t) , если каждый локальный переход в ней из одного состояния в другое заменить эквивалентной группой переходов, имеющих постоянные во времени интенсивности, таким образом, чтобы результирующая условная вероятность перехода в этой группе была достаточно близка к условной вероятности перехода в реальной системе. Таким образом, задача сводится к синтезу такой эквивалентной системы с фиксированным конечным числом состояний, которая описывается дифференциальными уравнениями с постоянными интенсивностями переходов. При этом в качестве критерия такой эквивалентности можно, например, взять ошибку в оценке времени «жизни» системы или другой критерий.

Для получения системы, статистически эквивалентной рассматриваемой (5.2), в исходной системе заменим каждый переход из состояния E_i в состояние E_{i+1} , имеющий интенсивность $\mu_i(t)$, четырьмя переходами с постоянными интенсивностями $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \mu_{i3}, \mu_{i4}$ ($0 \leq i \leq n-1$). Полученный в результате такой замены граф переходов эквивалентной системы изображен на рис. 5.2.

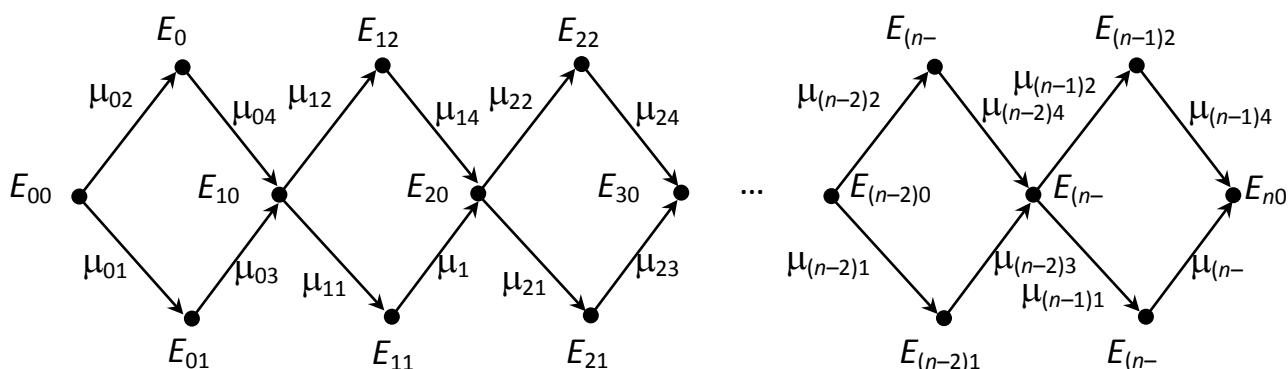


Рис. 5.2. Граф переходов статистически эквивалентной системы

Обозначим $p_{i0}(t)$ – вероятность нахождения системы в состоянии E_{i0} ($0 \leq i \leq n$); $p_{j1}(t)$, $p_{j2}(t)$ – вероятности нахождения системы соответственно в состояниях E_{j1} и E_{j2} ($0 \leq j \leq n-1$). Тогда система дифференциальных уравнений эквивалентной системы, соответствующая графу на рис. 5.2, примет вид

$$\begin{aligned}
 p'_{00}(t) &= -(\mu_{01} + \mu_{02}) p_{00}(t), \\
 p'_{k0}(t) &= \mu_{(k-1)3} p_{(k-1)1}(t) + \mu_{(k-1)4} p_{(k-1)2}(t) - (\mu_{k1} + \mu_{k2}) p_{k0}(t), \\
 k &= 1, 2, \dots, (n-1), \\
 p'_{l1}(t) &= \mu_{l1} p_{l0}(t) - \mu_{l3} p_{l1}(t), \\
 p'_{l2}(t) &= \mu_{l2} p_{l0}(t) - \mu_{l4} p_{l2}(t), \\
 l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1), \\
 p'_{n0}(t) &= \mu_{(n-1)3} p_{(n-1)1}(t) + \mu_{(n-1)4} p_{(n-1)2}(t).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Следуя [47], положим:

$$\mu_{l1} = \mu_{l3} = \mu_{l4} = \tilde{\mu}_l; \mu_{l2} = \alpha_l \tilde{\mu}_l; \alpha_l > 0; 0 \leq l \leq (n-1).$$

Тогда систему уравнений (5.3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 p'_{00}(t) &= -\tilde{\mu}_0(1 + \alpha_0) p_{00}(t), \\
 p'_{k0}(t) &= \tilde{\mu}_{k-1} p_{(k-1)1}(t) + \tilde{\mu}_{k-1} p_{(k-1)2}(t) - \tilde{\mu}_k(1 + \alpha_k) p_{k0}(t), \\
 k &= 1, 2, \dots, (n-1), \\
 p'_{l1}(t) &= \tilde{\mu}_l p_{l0}(t) - \tilde{\mu}_l p_{l1}(t), \\
 p'_{l2}(t) &= \alpha_l \tilde{\mu}_l p_{l0}(t) - \tilde{\mu}_l p_{l2}(t), \\
 l &= 0, 1, \dots, (n-1), \\
 p'_{n0}(t) &= \tilde{\mu}_{n-1} p_{(n-1)1}(t) + \tilde{\mu}_{n-1} p_{(n-1)2}(t)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

с начальными условиями

$$p_{00}(\tau) = 1; \quad p_{k0}(\tau) = p_{l0}(\tau) = p_{n0}(\tau) = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq l \leq n-1).$$

Решение системы уравнений (5.4) не представляет трудностей, если известны интенсивности переходов $\tilde{\mu}_l$ ($0 \leq l \leq n-1$) в эквивалентной системе. Зная математическое ожидание T_l и второй начальный момент α_{2l} для локального перехода в реальной системе, можно определить соответствующие интенсивности переходов в эквивалентной системе по следующим формулам:

$$\tilde{\mu}_l = \frac{1}{T_l} \left(\frac{2 + \alpha_l}{1 + \alpha_l} \right), \quad \alpha_l = \frac{-(3 - 2\omega_l) \pm \sqrt{2\omega_l - 3}}{2 - \omega_l}, \quad \omega_l = \frac{\alpha_{2l}}{T_l^2}.$$

Параметры T_l и α_{2l} могут быть определены по формулам

$$T_l = \int_0^{\infty} e^{-\int_{\tau}^{\tau+\tilde{\tau}} \mu_l(t) dt} d\tilde{\tau}, \quad \alpha_{2l} = \int_0^{\infty} \tilde{\tau} e^{-\int_{\tau}^{\tau+\tilde{\tau}} \mu_l(t) dt} d\tilde{\tau}.$$

Решение задачи имеет смысл при выполнении условий $\alpha_l > 0$ и $\omega_l \geq 3/2$.

В общем случае систему дифференциальных уравнений (5.4) целесообразно интегрировать численными методами на ПЭВМ. Тогда функциональная готовность $P_{\text{ФГ}}(t)$ рассматриваемой технической системы после начала ее подготовки (настройки) или восстановления после отказа блоков в процессе противоборства определяется выражением

$$P_{\text{ФГ}}(t)p_{n0}(t) = 1 - \left[p_{00}(t) + \sum_{l=0}^{n-1} [p_{l1}(t) + p_{l2}(t)] + \sum_{k=1}^{n-1} p_{k0}(t) \right].$$

В частном случае (когда известно, что все $\tilde{\mu}_l$ ($0 \leq l \leq n-1$) различны), воспользовавшись преобразованием Лапласа, для вычисления функции готовности $P_{\Phi\Gamma}(t)$ технической системы можно записать выражение

$$P_{\Phi\Gamma}(t) = 1 - \prod_{i=0}^{2n-1} M_i \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{e^{-M_j t}}{M_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2n-1} (M_k - M_j)},$$

где

$$M_l = \tilde{\mu}_i(1 + \alpha_i) \quad (0 \leq i \leq n-1) \quad \text{для} \quad (0 \leq \ell \leq n-1),$$

$$M_l = \tilde{\mu}_i \quad (0 \leq i \leq n-1) \quad \text{для} \quad (n \leq \ell \leq 2n-1),$$

$$M_\ell \neq 0 \quad \text{для} \quad (0 \leq \ell \leq 2n-1).$$

Кроме рассмотренного, возможен и другой подход к решению поставленной задачи, заключающийся в том, что для сведения реального процесса подготовки технической системы к противоборству и восстановления работоспособности после отказов компонентов системы, где $\mu_i(t)$ – функция времени, к эквивалентному однородному марковскому процессу в ряде случаев статистически эквивалентную систему дифференциальных уравнений можно составить, используя закон Эрланга k -го порядка [43].

Действительно, если в реальном процессе подготовки – настройки и восстановления после отказов технической системы математическое ожидание времени выполнения i -й операции равно m_i , а дисперсия D_i , то каждую i -ю операцию можно заменить группой из k_i однотипных последовательных операций с постоянными интенсивностями μ_i^* . В этом случае статистически

эквивалентную группу можно определить исходя из равенства математических ожиданий и дисперсий.

С учетом сказанного, можно записать:

$$m_i = \frac{k_i + 1}{\mu_i^*}, \quad D_i = \frac{k_i + 1}{(\mu_i^*)^2}.$$

Из приведенных выражений при $k_i^* = k_i + 1$ следует:

$$\mu_i^* = \frac{m_i}{D_i}, \quad k_i^* = \frac{m_i^2}{D_i}. \quad (5.5)$$

Используя равенства (5.5), реальный процесс подготовки к работе или восстановления после отказов блоков технической системы можно свести к эквивалентному однородному марковскому процессу. При этом система эквивалентных дифференциальных уравнений может быть записана в следующем виде:

$$p'_{00}(t) = -\mu_0^* p_{00}(t),$$

$$p'_{ij_i}(t) = \mu_{i(j_i-1)}^* p_{i(j_i-1)}(t) - \mu_{ij_i}^* p_{ij_i}(t),$$

$$p'_{in}(t) = \mu_{(n-1), k_n}^* p_{in}(t),$$

$$i = 0, 1, \dots, (n-1), \quad j_i = 1, 2, \dots, k_i^*,$$

с начальными условиями

$$p_{00}(0) = 1, \quad p_{ij_i}(0) = p_{in}(0) = 0.$$

Решение подобных уравнений не представляет трудностей, а функциональная готовность технической системы в этом случае определяется выражением

$$P_{\Phi\Gamma}(t) = 1 - \sum_{i, j_i} p_{ij_i}(t).$$

Следует отметить, что рассмотренные два подхода к приближенному вычислению функциональной готовности технической системы при подготовке к работе в условиях наличия помех, создаваемых противником, и восстановлении работоспособности после отказов блоков системы в процессе противоборства позволяют восполнить имеющийся пробел при построении и исследовании вероятностных моделей надежности участвующих в конфликтных ситуациях технических систем и сделать эти модели более адекватными реальным условиям функционирования.

**5.2. Модели для вычисления функциональной готовности
технической системы при подготовке ее к противоборству
в конфликтной ситуации и при восстановлении
работоспособности после отказов компонентов в процессе
противоборства при конечной надежности системы подготовки
и восстановления с учетом надежности человека-оператора**

Практически во всех известных работах, посвященных исследованию вопросов противоборства технических систем в конфликтных ситуациях, влияние человеческого фактора на поведение и надежность работы таких систем либо не рассматривалось вообще, либо молчаливо полагалось, что человек, участвующий в процессе подготовки технической системы к противоборству или восстановлению работоспособности после отказов компонентов в процессе противоборства, является абсолютно надежным и не подверженным негативному влиянию со стороны противника, снижающим его характеристики надежности.

На самом деле, любая техническая система, участвующая в конфликтной ситуации, как правило, является системой с программно-аппаратным управлением процесса подготовки технической системы к противоборству в конфликтной ситуации и восстановлению работоспособности системы после отказов и представляет собой человеко-машинный комплекс, в котором человек может выполнять функции оператора (настройщика), ремонтника, оператора и ремонтника, эргатического резерва (резервного компонента в системе) и другие, в зависимости от поставленных целей и задач перед технической системой. Поэтому логично рассмотреть две модели надежности технической системы в процессе подготовки к участию в конфликтной ситуации и в процессе противоборства системы: одну – когда человек-оператор абсолютно надежный, а вторую – когда человек-оператор обладает конечной надежностью.

Далее будем полагать, что человек является составной частью технической системы и оказывает влияние на ее надежность в процессе подготовки к работе и в процессе восстановления после отказов. При этом будем считать, что в идеальном случае человек абсолютно надежный, а в реальных условиях человек обладает конечной надежностью и в силу физиологических особенностей или воздействия на него противника может ошибаться (временно отказывать) с интенсивностью ζ и восстанавливать свою работоспособность с интенсивностью $\nu > 0$, при условии абсолютной надежности человека. При конечной надежности человека $\nu = 0$.

Поведение рассматриваемого человеко-машинного комплекса будем исследовать в предположении аппроксимации его марковским процессом и простейших потоках отказов и восстанов-

лений как человека, так и технической части системы, в состав которой включим систему контроля состояния технической системы и управления процессом восстановления функциональных свойств после отказов. При этом будем полагать, что интенсивность отказов системы контроля и восстановления технической системы равна λ , а интенсивность ее восстановления после отказов равна μ .

Развивая изложенные выше идеи, будем считать, что в процессе подготовки к противоборству и восстановления после отказов технической системы, осуществляемого, как правило, в автоматизированном режиме, принимает участие человек-оператор, который может ошибаться, делать сбои и даже отказывать, а система подготовки и восстановления после отказов имеет конечную надежность. В этом случае, как было отмечено выше, техническую систему следует рассматривать как человеко-машинный комплекс и при составлении ее математической модели учитывать человеческий фактор, то есть возможные ошибки и сбои человека-оператора (интенсивность которых на 1–2 порядка выше интенсивности сбоев технических средств [48]), которые могут быть восстановлены.

5.2.1. Первая математическая модель

Будем рассматривать процесс подготовки технической системы к работе в конфликтной ситуации в предположении, что аппаратно-программная часть системы подготовки имеет конечную надежность, а оператор абсолютно надежный.

Обозначим $E_i (i = 0, 1, \dots, n)$ – состояние технической системы на i -м шаге процесса подготовки к функционированию (подготовки к работе) или восстановления после отказов блоков в процессе противоборства системы; $\mu_i = \text{const} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ – интенсивность выполнения i -й операции подготовки (восстановления после отказов) системы; $E_{ij} (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n)$ – состояние технической системы на i -м шаге подготовки (восстановления) при наличии отказа в аппаратно-программной части системы подготовки; λ – интенсивность отказов аппаратно-программной части системы подготовки к работе (восстановления после отказов), а μ – интенсивность ее восстановления после отказа аппаратно-программной части системы.

Тогда поведение рассматриваемой технической системы может быть описано (при условии марковского процесса) графом переходов (рис. 5.3).

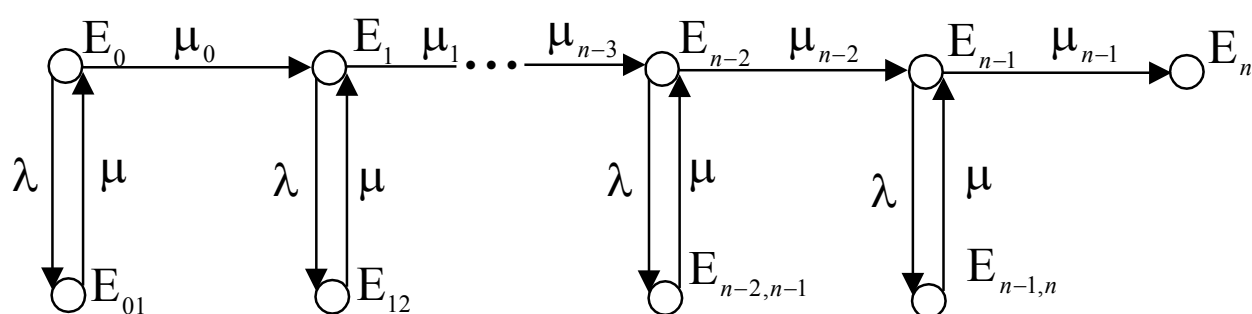


Рис. 5.3. Граф процесса подготовки к функционированию и процесса восстановления после отказов технической системы при абсолютно надежном операторе и конечной надежности аппаратно-программной части системы подготовки к работе и восстановлению после отказов

Пусть $p_i(t)$ – вероятность нахождения технической системы в состоянии E_i ($i = 0, 1, \dots, n$); $p_{ij}(t)$ – вероятность нахождения системы в состоянии E_{ij} ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, n$). Тогда по известным правилам [43] нетрудно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой технической системы, при сделанных выше допущениях:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= \mu p_{01}(t) - (\mu_0 + \lambda) p_0(t), \\ p'_k(t) &= \mu_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu p_{k,k+1}(t) - [\mu_k p_k(t) + \lambda p_{k,k+1}(t)], \\ k &= 1, 2, \dots, n-1 \\ p'_n(t) &= \mu_{n-1} p_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Решая систему уравнений (5.6) аналитически [19] либо численными методами при начальных условиях $p_0(0) = 1$; $p_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq n$; $p_{ij}(0) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, n$), легко вычислить функциональную готовность $P_{\Phi\Gamma}(t)$ рассматриваемой технической системы, участвующей в конфликтной ситуации:

$$P_{\Phi\Gamma}(t) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(t) + \sum_{\substack{i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,n}} \rho_{ij}(t) \right].$$

Это выражение легко реализуется на любом компьютере.

5.2.2. Вторая математическая модель

Используя предположения и обозначения, введенные при рассмотрении первой модели, будем полагать, что человек-оператор, производящий подготовку к работе и принимающий участие в восстановлении системы после отказов в процессе проти-

воборства, имеет конечную надежность. Это означает, что в процессе подготовки к работе и восстановления работоспособности после отказов технической системы он может в силу физиологических факторов и под негативным воздействием противника допускать ошибки (сбои – временные отказы) с интенсивностью ζ , до устранения которых (восстановления работоспособности оператора с интенсивностью ν) рассматриваемая техническая система будет находиться в одном из «отказовых» состояний $E_{ij} (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n)$. Вероятность нахождения системы в состоянии E_{ij}^* обозначим $p_{ij}(t)$.

Поведение такой системы описывается графом, изображенным на рис. 5.4.

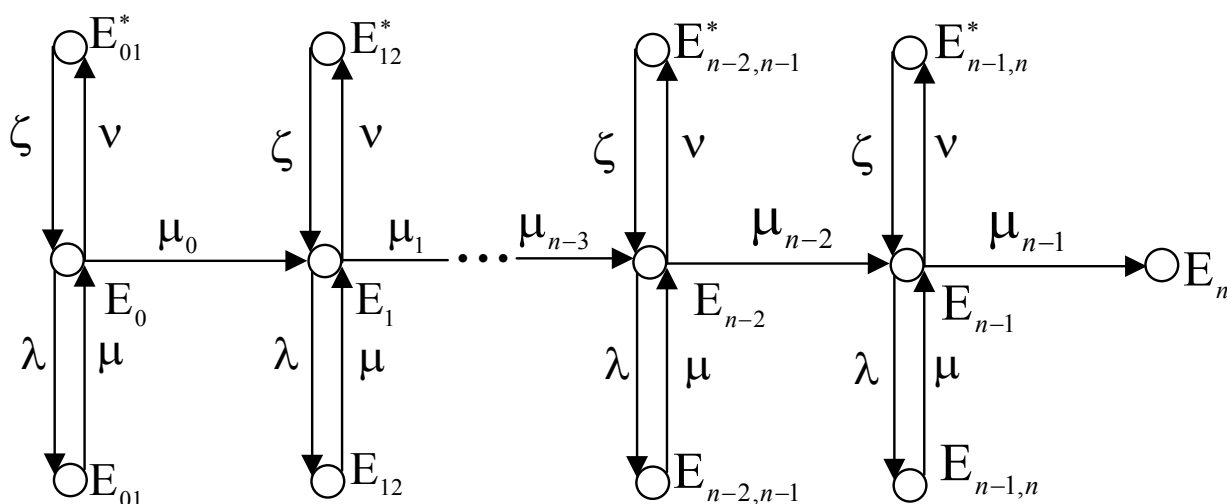


Рис. 5.4. Граф процесса подготовки к функционированию и процесса восстановления после отказов технической системы при конечной надежности оператора и аппаратно-программной части системы подготовки к работе и восстановлению

Очевидно, что в рамках сделанных предположений система дифференциальных уравнений, описывающих поведение такой технической системы, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= \mu p_{01}(t) + \zeta p_{01}^*(t) - (\mu_0 + \lambda + \nu) p_0(t), \\ p'_k(t) &= \mu_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu p_{k,k+1}(t) + \zeta p_{k,k+1}^*(t) - \\ &\quad - [\mu_k p_k(t) + \lambda p_{k,k+1}(t) + \nu p_{k,k+1}^*(t)], \\ k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ p'_n(t) &= \mu_{n-1} p_{n-1}(t). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решение системы уравнений (5.7) с начальными условиями $p_0(0) = 1$; $p_i(0) = 0$, $1 \leq i \leq n$; $p_{ij}(0) = 0$, $p_{ij}^*(0) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, n$), так же как и системы уравнений (5.6), не представляет трудности.

Для рассматриваемой модели технической системы функциональная готовность вычисляется по формуле

$$P_{\Phi\Gamma}(t) = 1 - \left[\sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(t) + \sum_{\substack{i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,n}} \rho_{ij}(t) + \sum_{\substack{i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,n}} p_{ij}^*(t) \right].$$

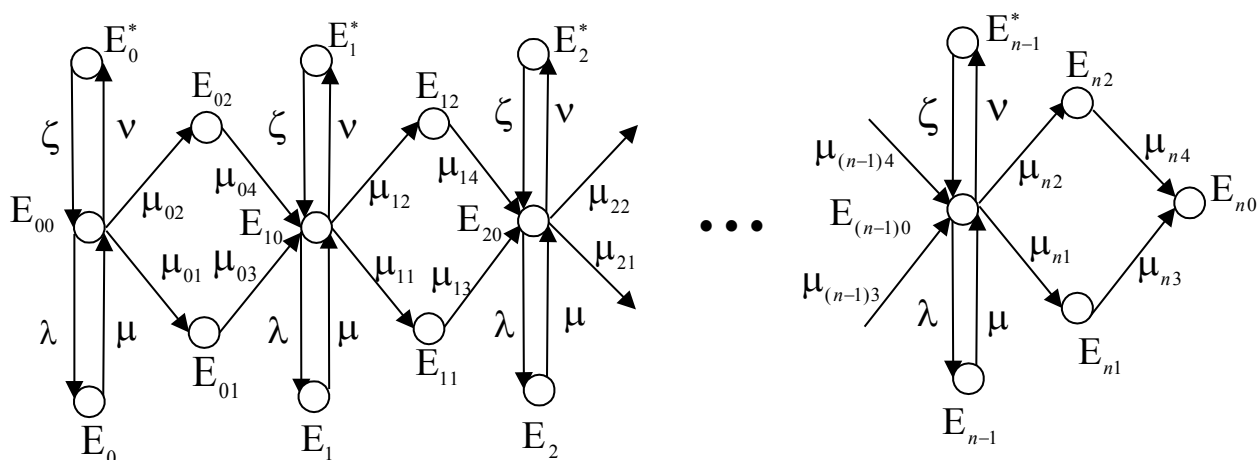
Теперь исследование функциональной готовности рассматриваемой технической системы с помощью персональной ЭВМ не представляет сложности.

5.2.3. Третья математическая модель

При рассмотрении первых двух моделей полагали, что интенсивность выполнения каждой i -й операции подготовки к ра-

боте или восстановления работоспособности технической системы после отказов μ_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) является постоянной величиной, то есть на интенсивность выполнения этих операций противник не оказывает влияние. В реальных условиях конфликтной ситуации противник, как правило, стремится повлиять (уменьшить) за счет своих ресурсов нападения на интенсивности выполнения операций подготовки к работе и восстановления работоспособности после отказов противоборствующей технической системы. При этом интенсивности восстановления являются функциями времени, т. е. $\mu_i(t) \neq const$ ($0 \leq i \leq n-1$). В этом случае модель для решения задачи вычисления функциональной готовности рассматриваемой системы может быть сведена к построению статистически эквивалентной системы [47], где каждый локальный переход из одного состояния в другое заменен так эквивалентной группой переходов, имеющих постоянные во времени интенсивности, что результирующая условная вероятность перехода в этой группе достаточно близка к условной вероятности перехода в реальной системе.

С учетом сказанного выше, при условии конечной надежности человека -оператора и аппаратной части системы подготовки технической системы к работе, используя обозначения, введенные в подразделе 5.1, и обозначения, сделанные при рассмотрении первой и второй модели, граф состояний, описывающий поведение рассматриваемой модели технической системы, принимает следующий вид (рис. 5.5).



Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой технической системы, участвующей в конфликте с учетом сделанных предположений, соответствующая графу на рис. 5.5, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 p'_{(n-2)0}(t) &= \mu p_{n-2}(t) + \zeta p_{n-2}^*(t) + \mu_{(n-1)1} p_{(n-2)1}(t) + \mu_{(n-1)2} p_{(n-2)2}(t) - \\
 &\quad - [\mu_{(n-1)1} p_{(n-1)1}(t) + \mu_{(n-1)2} p_{(n-1)2}(t) + \lambda p_{n-2}(t) + \nu p_{n-2}^*(t)], \\
 p'_{(n-1)0}(t) &= \mu p_{n-1}(t) + \zeta p_{n-1}^*(t) + \mu_{(n-1)3} p_{(n-1)1}(t) + \mu_{(n-1)4} p_{(n-1)2}(t) - \\
 &\quad - [\mu_{n1} p_{n1}(t) + \mu_{n2} p_{n2}(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \nu p_{n-1}^*(t)], \\
 p'_{n0}(t) &= \mu_{n3} p_{n1}(t) + \mu_{n4} p_{n2}(t).
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (5.8) в аналитическом виде ввиду громоздкости не представляется возможным, поэтому для ее решения следует использовать численные методы, легко реализуемые на современных профессиональных ПЭВМ.

Для вычисления функциональной готовности рассматриваемой технической системы используется следующее выражение:

$$P_{\Phi T}(t) = 1 - \left[\sum_{i=0,1,\dots,n} (\rho_{i0}(t) + p_{i1}(t) + p_{i2}(t)) + \sum_{i=0,1,\dots,n-1} (p_i(t) + p_i^*(t)) \right],$$

где вероятности $p_{ij}(t)$, $p_i(t)$, $p_i^*(t)$ соответствуют нахождению технической системы в состояниях, обозначенных одноименными вершинами графа на рис. 5.5.

Следует отметить, что рассмотренные простейшие модели строились в предположении, что интенсивности отказов и восстановления человека-оператора являются постоянными величинами. Однако психическое состояние и внешние факторы, например воздействие со стороны противника, оказывающие влияние на поведение человека, выполняющего интеллектуально сложную работу, связанную с подготовкой к работе и восстановлением работоспособности технической системы после отказов, влияют на интенсивность его сбоев и отказов и, как следст-

вие, на интенсивность подготовки и восстановление работоспособности. Поэтому данный фактор следует учитывать при построении более сложных моделей, адекватных конкретным условиям работы человека-оператора. При этом очевидно, что противник стремится увеличить интенсивность отказов (ошибок) $\zeta(t)$ человека-оператора и уменьшить интенсивность $\nu(t)$ восстановления его работоспособности после отказа или сбоя в процессе работы.

Используя положения, идеи и примеры построения математических моделей для вычисления функциональной готовности участвующей в конфликтной ситуации технической системы в процессе ее подготовки к работе и в процессе восстановления работоспособности после отказов компонентов с учетом участия в этих процессах человека-оператора, нетрудно построить математическую модель для вычисления функциональной готовности технической системы $P_{\text{ФГ}}(t)$, когда все переменные $\mu_i(t), \lambda_i(t), \zeta_i(t), \nu_i(t)$, участвующие в построении модели, являются функциями времени.

Ввиду громоздкости такой модели автор счел возможным не помещать ее в книгу. Читатель может решить такую задачу самостоятельно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С конфликтными ситуациями в различной форме их проявления человечество сталкивается всегда, начиная от конфликтов на бытовом уровне и кончая межгосударственными и даже трансконтинентальными конфликтами.

Поэтому формализация вопросов разрешения конфликтов всегда представляла научный, а в последние десятилетия, в связи с развитием информационных технологий и компьютерных систем, и большой практический интерес для широкого круга специалистов в соответствующей области деятельности, включая военных, экономистов, бизнесменов, общественных и политических деятелей.

В перечне этих интересов особое место занимают вопросы построения математических моделей конфликтных ситуаций, разработки алгоритмов и программного обеспечения для численного решения задач оптимизации поведения противоборствующих систем (сторон) в условиях конкретного конфликта с целью достижения с минимальными потерями поставленных каждой из участвующих в конфликте сторон задач.

Многообразие конфликтных ситуаций и форм противоборства конфликтующих сторон слишком велико и в большинстве своем слабо исследовано, чтобы делать какие-то обобщения, поэтому автор книги решил ограничиться рассмотрением моделей и алгоритмов численного решения задач противоборства в кон-

фликтных ситуациях аппаратно-избыточных, восстанавливаемых после отказов технических систем, и в качестве оптимизируемых параметров этих систем были выбраны вероятность безотказной работы и/или среднее время безотказной работы соответствующей системы в течение конфликта. Такой подход автора к содержанию книги вызван тем, что все рассмотренные в ней задачи, полученные в течение длительного времени лично или совместно со своими учениками, взаимосвязаны, методологически едины, опубликованы в печати. Публикации, прямо относящиеся к рассматриваемым в книге задачам, указаны в библиографическом списке и нашли в данной работе свое естественное обобщение, удобное для восприятия заинтересованного читателя, так как книга построена по принципу: «от простых задач – к сложным» с использованием при решении последующих по сложности задач предшествующих положений, моделей, методов и численных алгоритмов.

В книге приводятся математические модели и алгоритмы для решения простейших задач противоборства технических систем в условиях конфликта.

Рассматриваются модели и алгоритмы для численного решения оптимизационных задач противоборства технических систем с восстановлением отказавших в процессе противоборства компонентов системы и с динамическим перераспределением средств собственной защиты в процессе конфликта.

Разрабатываются вопросы построения моделей и алгоритмов численного решения задач оптимального управления подвижными объектами, каждый из которых является сложной, динамически перестраиваемой в процессе конфликта системой и об-

ладает как средствами нападения, так и средствами собственной защиты.

Приводятся модели и задачи для расчета функциональной готовности технической системы при подготовке к противоборству в конфликтной ситуации и к продолжению противоборства после отказов и восстановления работоспособности компонентов без учета и с учетом человеческого фактора.

Все рассмотренные в книге задачи противоборства технических систем в конфликтных ситуациях доведены до численных алгоритмов, удобных для компьютерной реализации. Для большинства задач разработано программное обеспечение, зарегистрированное в соответствующих фондах алгоритмов и программ, и заинтересованные читатели могут им воспользоваться.

Известно, что история сослагательного наклонения не знает. Однако, если предположить, что во время Великого противостояния и противоборства двух военно-промышленных сверхсистем – Советского Союза и фашистской Германии, 70-летие Победы в котором отмечает в этом году наша страна, мы обладали бы современными информационными технологиями и средствами вычислительной техники и могли использовать их, умели бы решать рассмотренные в данной книге задачи оптимизации использования средств защиты и средств нападения в конкретных возникающих конфликтных ситуациях в процессе противоборства и использовать результаты решения этих задач в реальном масштабе времени, то, по-видимому, можно с большой достоверностью предположить, что вероятность людских потерь и потерь военной техники в течение всего времени противоборства была бы существенно меньше, чем оказалось в действительности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Половко, А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2006. – 704 с.
2. Черкесов, Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью / Г.Н. Черкесов. – М. : Сов. радио, 1974. – 295 с.
3. Креденцер, Б.П. Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью / Б.П. Креденцер. – Киев : Наук. думка, 1978. – 238 с.
4. Потапов, В.И. Математическая модель и алгоритм решения задачи противоборства в конфликтной ситуации двух восстанавливаемых после отказов систем / В.И. Потапов // Омский научный вестник. Серия: Приборы, машины и технологии. – 2014. – № 1(127). – С. 16–19.
5. Потапов, В.И. Противоборство (дифференциальная игра) между подвижными управляемыми объектами / В.И. Потапов // Омский научный вестник. Серия: Приборы, машины и технологии. – 2014. – № 1(127). – С. 20–21.

6. Потапов, В.И. Новые задачи оптимизации резервированных систем / В.И. Потапов, С.Г. Братцев. – Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1986. – 112 с.

7. Потапов, В.И. Противоборство (дифференциальная игра) двух нейрокомпьютерных систем / В.И. Потапов, И.В. Потапов // Информационные технологии. – 2005. – № 8. – С. 53–57.

8. Мазалов, В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов. – СПб. : Изд-во «Лань», 2010. – 448 с.

9. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. – М. : Наука, 1971. – 383 с.

10. Крапивин, В.Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях / В.Ф. Крапивин. – М. : Сов. радио, 1972. – 192 с.

11. Nartov, B.K. Conflict of Moving Systems. – AMSE Press, France, 1994. – 87 p.

12. Нартов, Б.К. Управление подвижными объектами. Формализация и модели / Б.К. Нартов. – Омск : Изд-во ОмГУ, 2002. – 83 с.

13. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М. : Мир, 1967. – 480 с.

14. Кривонос, Ю.Г. Динамические игры с резервными траекториями / Ю.Г. Кривонос, И.И. Матичин, А.А. Чикрий. – Киев: Наук. думка, 2005. – 219 с.

15. Петросян, Л.А. Динамические игры и их приложения / Л.А. Петросян, Г.В. Томский. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. – 252 с.
16. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. – М. : Наука, 1985. – 517 с.
17. Потапов, В.И. Постановка двух задач оптимального управления подвижной структурно-перестраиваемой избыточной системой, управляемой по каналам связи / В. И. Потапов // Динамика систем, механизмов и машин : матер. VIII Междунар. науч.-техн. конференции, посвященной 70-летию ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. – С. 276–278.
18. Оуэн, Н.Г. Теория игр и игровое моделирование. Исследование операций. Методологические основы и математические методы / Н.Г. Оуэн. – М. : Мир, 1981. – Т.1. – С. 513–549.
19. Козлов, Б.А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики / Б.А. Козлов, И.А. Ушаков. – М. : Сов. радио, 1975. – 472 с.
20. Потапов, В.И. Оптимизация функциональной надежности избыточной, восстанавливаемой после отказов нейронов, «стареющей» искусственной нейронной сети / В.И. Потапов, И.В. Потапов // Информационные технологии. – 2004. – № 12. – С. 19–26.
21. Черкесов, Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов / Г.Н. Черкесов. – СПб. : Питер, 2005. – 497 с.

22. Потапов, В.И. О минимальной избыточности, гарантирующей требуемую надежность «стареющей» искусственной нейронной сети / В.И. Потапов // Омский научный вестник. – 2003. – № 2(23). – С. 110–111.

23. Райкин, А.Л. Вероятностные модели функционирования резервированных устройств / А.Л. Райкин. – М. : Наука, 1971. – 216 с.

24. Доманицкий, С.М. Построение надежных логических устройств / С.М. Доманицкий. – М. : Энергия, 1971. – 280 с.

25. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 584 с.

26. Потапов, В.И. Теоретические основы диагностики и оптимизации надежности искусственных нейронных сетей / В.И. Потапов, И.В. Потапов. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2004. – 152 с.

27. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. – М. : Наука, 1985. – 517 с.

28. Федоренко, Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – М. : Наук, 1978. – 486 с.

29. Флеминг, У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. – М. : Мир, 1978. – 316 с.

30. Козлов, Б.А. Резервирование с восстановлением / Б.А. Козлов. – М. : Сов. радио, 1969. – 152 с.
31. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное начисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1974. – 542 с.
32. Мишина, А.П. Высшая алгебра / А.П. Мишина, И.В. Проскуряков. – М. : Наук, 1965. – 300 с.
33. Беллман, Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М. : Мир, 1968. – 324 с.
34. Потапов, В.И. Оптимизация функциональной надежности «стареющих» искусственных нейронных сетей нейрокомпьютеров с динамическим резервированием / В.И. Потапов, И.В. Потапов // Доклады АН ВШ России. – 2004. – № 2(3). – С. 76–81.
35. Потапов, В.И. Модель и алгоритм численного решения задачи противоборства двух избыточных, восстанавливаемых после отказов технических систем / В.И. Потапов // Проблемы управления и информатики : междунар. науч.-техн. журнал. – 2015. – № 2.
36. Дюбин, Г.Н. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. – М. : Наука, 1981. – 336 с.
37. ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия, термины и определения. – М. : Изд-во стандартов, 1990. – 36 с.

38. Сачков, В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики / В.Н. Сачков. – М. : Наука, 1977. – 320 с.

39. Потапов, В.И. Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации / В.И. Потапов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 7(160). – С. 16–22.

40. Потапов, В.И. Постановка двух задач оптимального управления подвижной, структурно-перестраиваемой избыточной системой, управляемой по каналам связи / В.И. Потапов // Динамика систем, механизмов и машин : матер. VII Междунар. науч.-техн. конференции, посвященной 70-летию ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. – С. 276–278.

41. Потапов, В.И. Противоборства (дифференциальная игра) двух нейрокомпьютерных систем / В.И. Потапов, И.В. Потапов // Информационные технологии. – 2005. – № 8. – С. 53–57.

42. Потапов, В.И. Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами / В.И. Потапов // Омский научный вестник. Серия: Приборы, машины и технологии, 2012. – № 3(113). – С. 268–271.

43. Вентцель, Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1972. – 550 с.

44. Потапов, В.И. Программа для решения задачи противоборства между подвижными и неподвижными объектами / В.И. Потапов, О.А. Горн // ФГАНУ «Центр информационных тех-

нологий и систем (ЦИТИС). Госрегистрация № 50201351179 от 13.12. 2013 г.

45. Потапов, В.И. Программа для решения дифференциальной игры между подвижными и неподвижными объектами / В.И. Потапов, О.А. Горн // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014612205 от 21. 02. 2014 г.

46. Потапов, В.И. Программа для решения задачи оптимального управления противоборствующими подвижными объектами / В.И. Потапов, О.А. Горн // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014617425 от 22. 07. 2014 г.

47. Васильев, Б.В. Надежность и эффективность радиоэлектронных устройств / Б.В. Васильев, Б.А. Козлов, Л.Г. Ткаченко. – М. : Сов. радио, 1964. – 368 с.

48. Литвинов, В.А. Контроль достоверности и восстановление информации в человеко-машинных системах / В.А. Литвинов, В.В. Крамаренко. – Киев : Техніка, 1986. – 200 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ПРОТИВОБОРСТВА ДВУХ ИГРОКОВ, РАСПОЛАГАЮЩИХ ПОДВИЖНЫМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ, И ДЛЯ ИГРОКОВ, РАСПОЛАГАЮЩИХ ПОДВИЖНЫМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ ОБЪЕКТАМИ

1. Спецификация программного комплекса

С целью компьютерного исследования оптимизационных игровых задач противоборства между двумя противниками, в первом случае, рассмотренных в разделе 4 данной книги, когда один из игроков управляет конечным числом подвижных (нападающих) объектов, второй – выбором мест расположения неподвижных пунктов защиты, а во втором случае, когда оба игрока располагают подвижными объектами, был разработан программный комплекс для проведения вычислительных экспериментов на основе алгоритмов игры противоборства между подвижными и неподвижными объектами и алгоритма дифференциальной игры между подвижными управляемыми объектами [46].

Назначение. Программный комплекс предназначен для решения задач оптимизации дифференциальной игры между противоборствующими объектами. В программном комплексе моделируются две задачи о нахождении оптимального управления противоборствующими подвижными объектами при условии,

что каждая из противоборствующих сторон создает зоны противодействия на участках траектории движения конкурента (противника), которые подвижному объекту нужно обходить, а также оказывает целенаправленное воздействие на увеличение интенсивности отказов компонентов противоборствующего подвижного объекта в течение времени противоборства. Для защиты от указанных воздействий противника противоборствующая сторона принимает оптимальную стратегию выбора траектории движения объекта и оптимальную пространственно-временную стратегию резервирования объекта с целью максимизации вероятности безотказной работы противоборствующего объекта в течение времени противоборства.

Выполняемые функции. Программный комплекс выполняет следующие основные функции:

- ввод исходных параметров игровых задач;
- расчет интенсивности отказов подвижного объекта;
- расчет вероятности безотказной работы противоборствующего подвижного объекта;
- вычисление траектории движения управляемых подвижных объектов, с указанием значения вектора расположения объектов;
- вычисление оптимальной стратегии поведения каждого из игроков в конфликтной ситуации, с указанием координат, задающих начальную точку, время движения (полета) и значения интенсивности отказов объекта, управляемого соответствующим игроком.

2. Основные компоненты, реализующие алгоритм решения задач оптимизации дифференциальной игры между противоборствующими объектами

Общий алгоритм работы программы представлен на рис. 1.

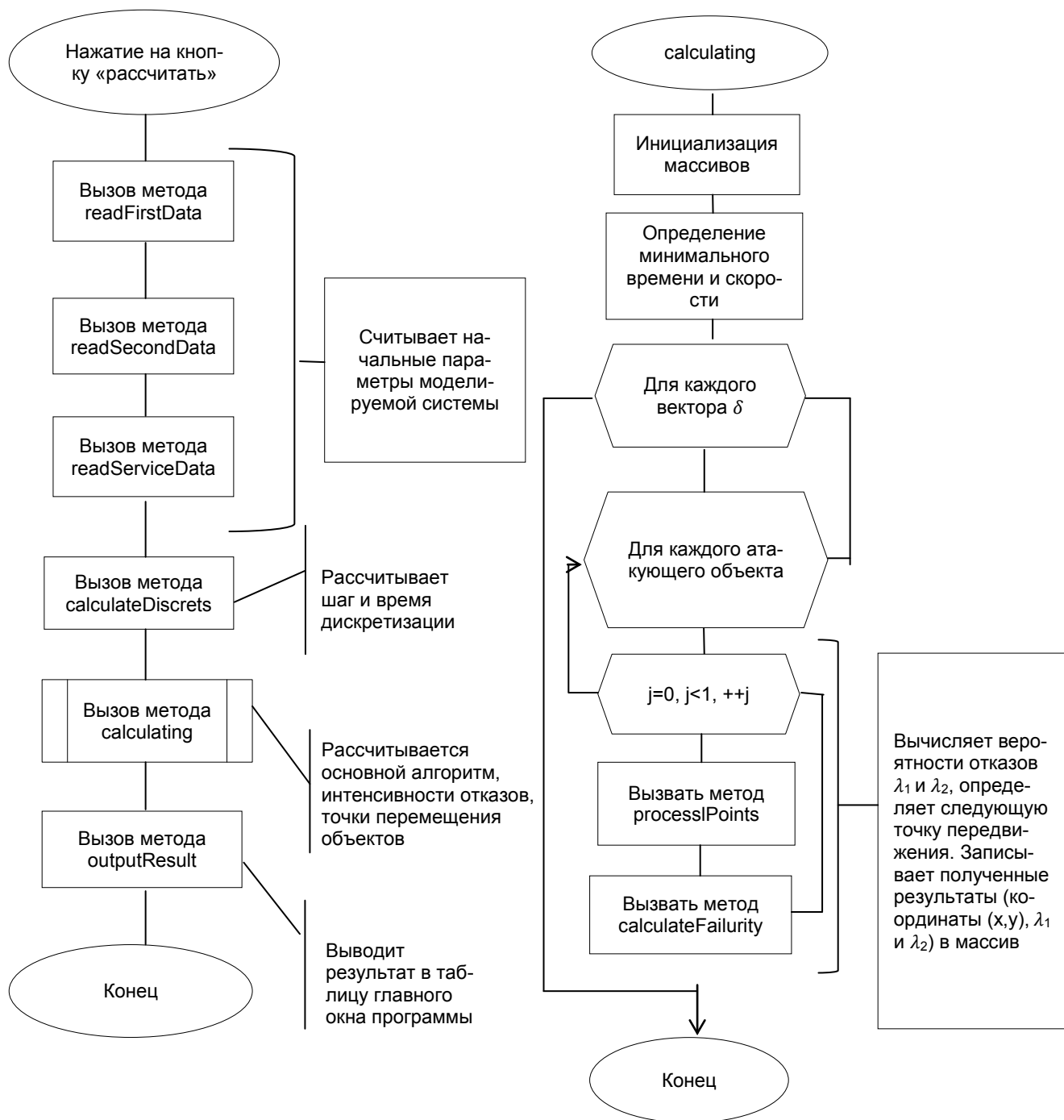


Рис. 1. Общий алгоритм работы программы

Программа после введения исходных данных ожидает нажатие кнопки «Рассчитать» от пользователя, после чего запускает алгоритм «рассчитать». Данные, введенные пользователем, считываются из соответствующих элементов памяти и проверяются на соответствие входному формату. Если все данные введены корректно, то программа начинает определение наилучших стратегий поведения для атакующих и защищаемых объектов. Вначале выполняется общая для всех итераций функция, вычисляющая шаг дискретизации.

По итогам работы системы формируется отчет с выходными данными, в котором детально представлены: номер объекта, координаты, по которым данный объект перемещается.

Данная программа выполняет расчет интенсивности отказов подвижного объекта, вероятности безотказной работы противоборствующего подвижного объекта, вычисление траектории движения управляемых подвижных объектов, с указанием значения вектора расположения объектов, вычисление оптимальной стратегии каждого из игроков, с указанием координат, задающих начальную точку и время полета и объекта до цели на падения.

3. Расчет интенсивности отказов объектов, участвующих в игре

Для реализации программы расчетов интенсивности отказов объектов, участвующих в игре, был разработан алгоритм, представленный на рис. 2, из которого видно, что ввод данных в программу происходит в несколько этапов.

Алгоритм описан графическим способом, так как этот способ является достаточно наглядным и легким к восприятию для читателя.

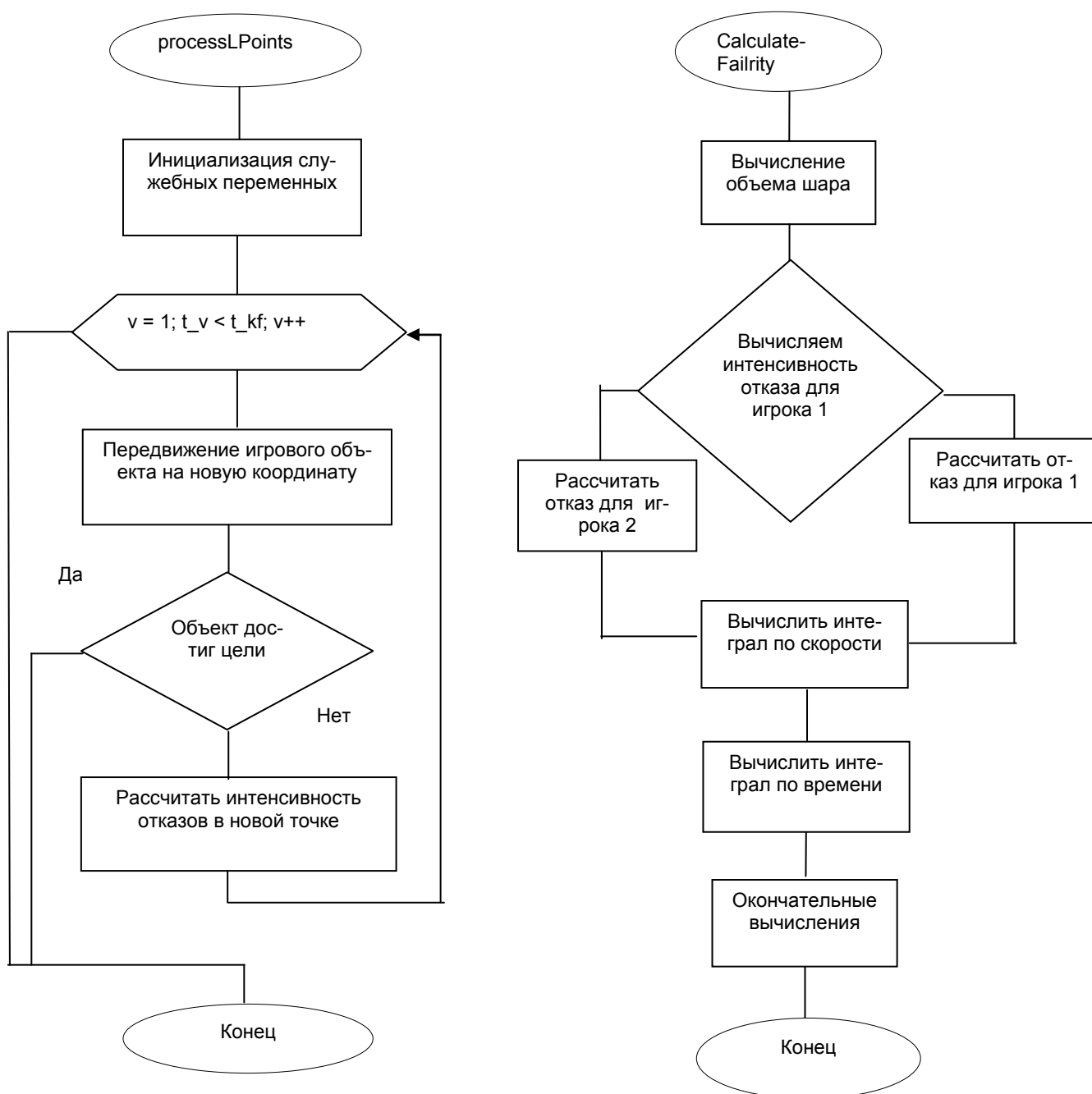


Рис. 2. Основные функции расчёта интенсивности отказов

В данном алгоритме не отмечено отдельным блоком сохранение результатов изменений функций в массив. Функция `processPoints` вычисляет новую точку в трехмерном пространстве. После перемещения на шаг дискретизации атакующего объекта проверяется, достиг ли он заданной цели, и если достиг, то вычисления прекращаются. Функция `calculateFailurity` вычисляет вероятность того, что цель уничтожена. Данная функция унифицированная для атакующего и защищающегося объекта.

4. Диаграмма классов программного комплекса

На рис. 3 показана диаграмма классов программного комплекса, которая состоит из трех основных классов, расположенных в связке «наследование»:

- Game Objects Common;
- Game Immovable Objects;
- Game Movable Objects.

Данные классы различаются только порядком вызова общих функций. Классы Game Immovable Objects и Game Movable Objects предназначены для реализации алгоритмов программного комплекса.

В классе Game Immovable Objects второй игрок неподвижен. В классе Game Movable Objects оба игрока перемещаются, т. е. подвижные. Оба класса наследуются от одного класса Game Objects Common. В нем содержатся все общие функции для алгоритма дифференциальной игры между подвижными и неподвижными объектами и дифференциальной игры между подвижными объектами.

Диаграмма классов содержит также следующие значимые классы:

ManagedObject – это абстрактный класс, описывающий объекты игрового поля, такие как атакующий и защищающий игроки и пункты защиты.

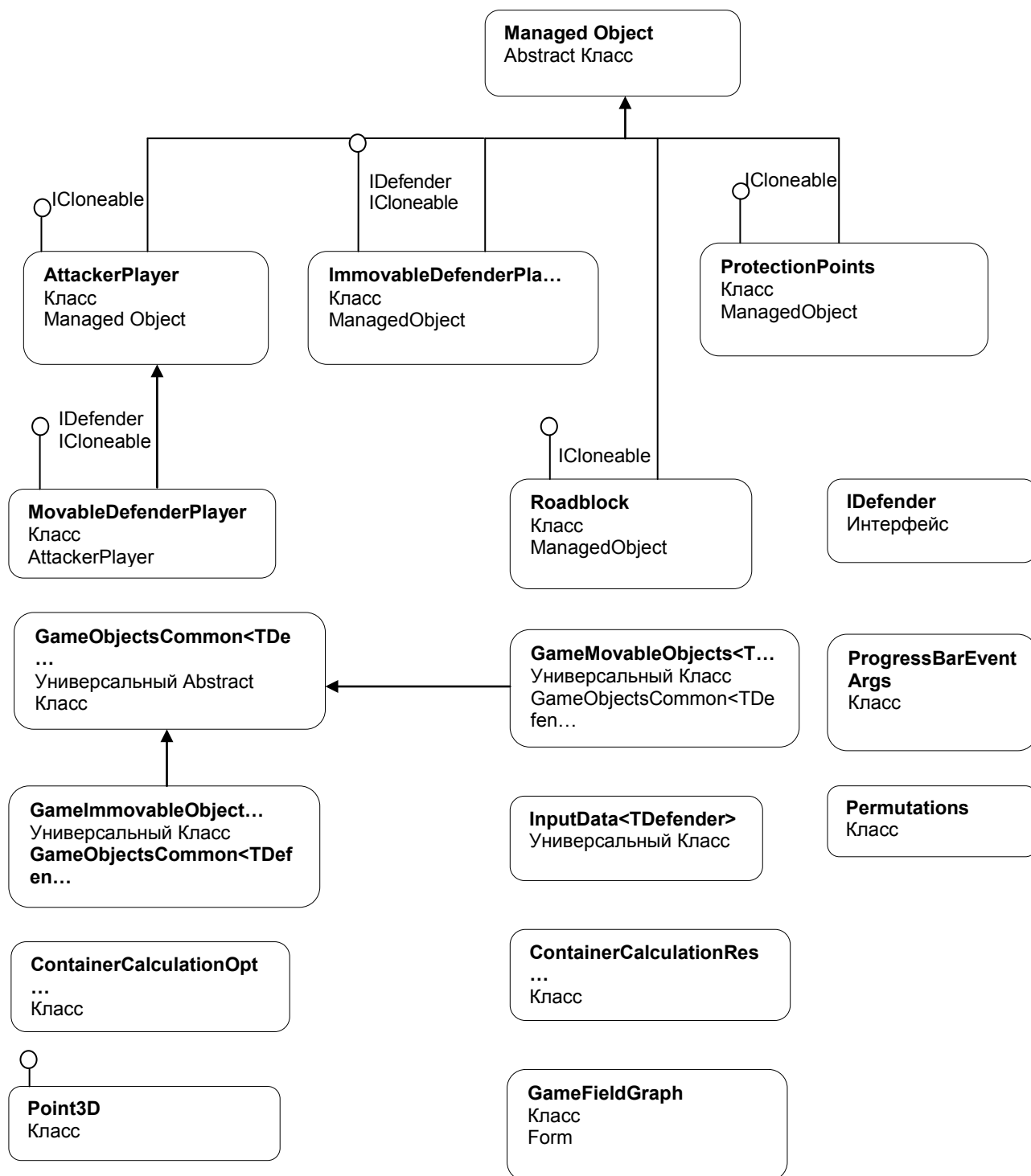


Рис. 3. Диаграмма классов программы

InputData – это класс-контейнер для всех объектов игрового поля. В нем содержатся классы:

- AttackerPlayer, описывающий объект атакующего игрока;
- DefenderPlayer, описывающий объект защищающего игрока;
- ProtectionPoints – точки, которые необходимо поразить первому игроку;
- Roadblock – пункты защиты, в которых второй игрок может разместить управляемые им объекты.

Класс Form1 является посредником между пользователем и системными объектами, он записывает начальные данные в класс InputData, производит основные вычисления и управляет отображением результатов этих вычислений.

Класс FileDebugInfo расширяет возможности класса Form1, позволяя выводить информацию о произведенных расчетах Excel файлов для дальнейшей обработки пользователем полученных результатов.

Таким образом, диаграммы классов показывают статическую структуру программы, то есть определяют типы объектов программного обеспечения и различного рода статические связи и отношения между ними.

Использование диаграммы классов в данном случае целесообразно, так как они являются центральным звеном методологии объектно-ориентированного анализа и проектирования.

5. Описание окон программного комплекса

Интерфейс программного комплекса имеет следующий вид (рис. 4):

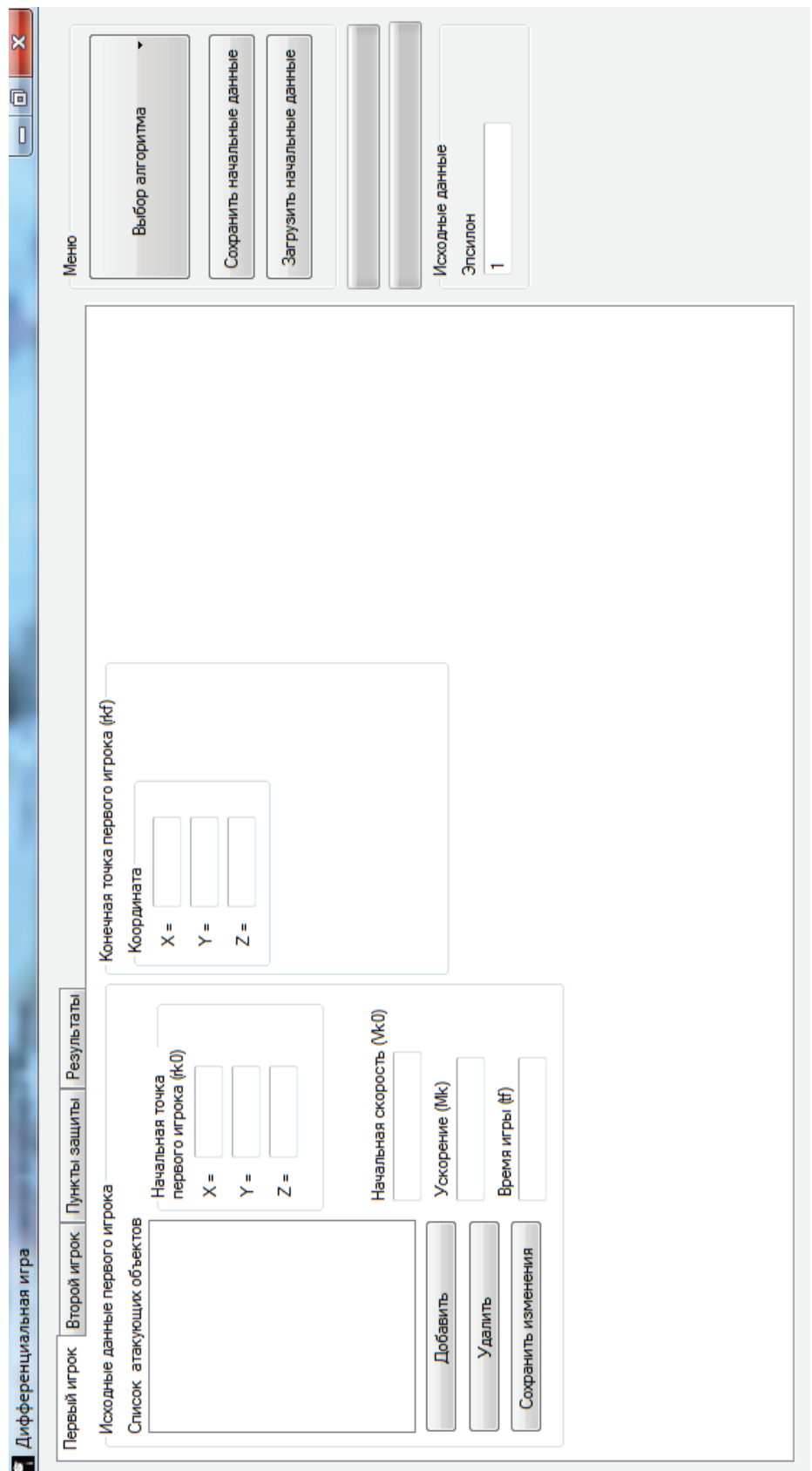


Рис. 4. Интерфейс программного комплекса

В программном комплексе предусмотрено пять окон:

- окно ввода данных первого игрока (рис. 7, рис. 8);
- окно ввода данных второго игрока (рис. 9, рис. 10);
- окно «Пункты защиты второго игрока» (рис. 11);
- «Результаты вычислений» (рис. 12);
- «Игровое поле» (рис. 13).

В правой части программы находится вкладка «Меню», которая функционирует и активна во всех окнах программы (рис. 5).

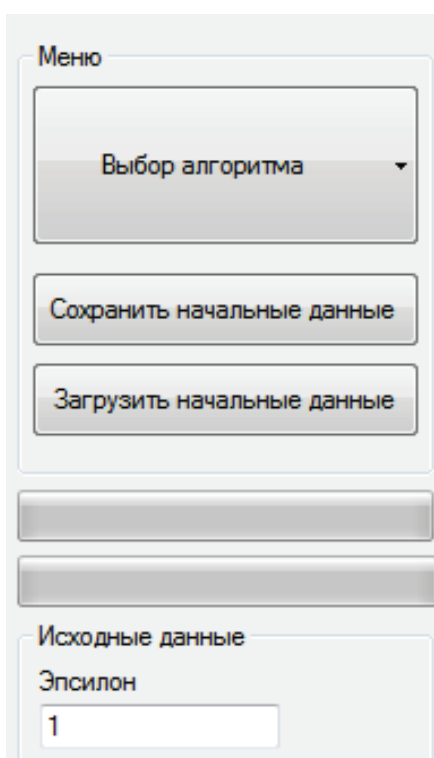


Рис. 5. Вкладка «Меню» программы

Вкладка «Меню» состоит из следующих компонентов.

– Кнопка «Выбор алгоритма» представляет собой всплывающее окно, которое содержит следующую информацию (рис. 6):

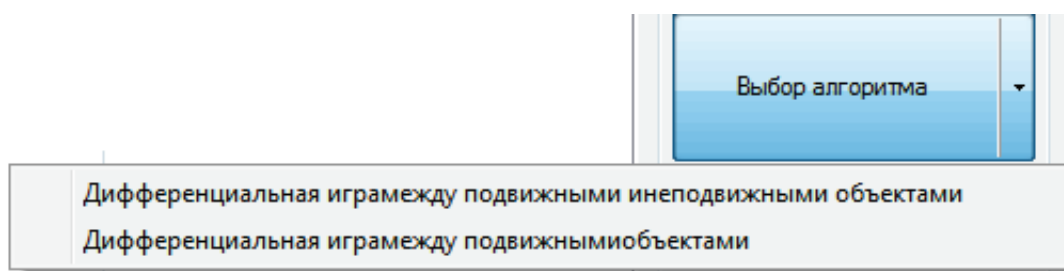


Рис. 6. Всплывающее окно

Кнопки «Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами» и «Дифференциальная игра между подвижными объектами», задают программе алгоритм выбранной задачи и позволяют вывести результаты расчетов на экран в окне «Результаты вычислений», т. е. получить решение задачи вычисления оптимальной стратегии игрока.

Кнопка «Сохранить начальные данные» сохраняет заданные параметры и результаты вычислений в указанном файле:

- при нажатии на кнопку «Загрузить начальные данные» программа загрузит исходные для расчета данные из указанного файла;

- ε — точность измерения траектории подвижного объекта.

Во время выполнения программы, отображается шкала состояния вычислений.

Окно ввода данных первого игрока содержит информацию об атакующих объектах (рис. 7), которые задаются следующими параметрами:

- начальная точка подвижного объекта первого игрока r_{k0} ;
- начальная скорость объекта v_{k0} ;
- ускорение объекта M_k ;
- время игры t_f ;
- конечная точка подвижного объекта первого игрока r_{kf} .

Дифференциальная игра

Первый игрок | Второй игрок | Пункты защиты | Результаты

Исходные данные первого игрока

Список атакующих объектов

Начальная точка первого игрока (k0)

X = Y = Z =

Начальная скорость (Mk0)

Ускорение (Mk)

Время игры (tf)

Добавить

Удалить

Сохранить изменения

Конечная точка первого игрока (kf)

Координата

X = Y = Z =

Меню

Дифференциальная игра между подвижными объектами

Сохранить начальные данные

Загрузить начальные данные

Исходные данные

Эпсилон

1

Рис. 7. Окно ввода данных первого игрока для игровой задачи «Дифференциальная игра между подвижными объектами»

При нажатии на кнопку «Выбор алгоритма» из вкладки меню выбирается алгоритм игровой задачи, по которому выполняются расчеты.

Окно ввода данных первого игрока для дифференциальной игры между подвижными объектами изображено на рис. 7.

Кроме всех указанных данных для первого игрока дифференциальной игры между подвижными объектами, для задачи противоборства между подвижными и неподвижными объектами, задаются β_k и b_{k2} – последовательности действительных чисел, которые определяются физико-географическими или иными особенностями точек r_{kf} , подлежащих защите, и типом k -го подвижного объекта.

Окно ввода данных первого игрока для решения дифференциальной игры между подвижными и неподвижными объектами изображено на рис. 8.

Начальная и конечная точки движения объекта первого игрока в обеих задачах задаются координатами атакующего объекта x, y, z .

Все заданные параметры окна ввода данных первого игрока формируются в список атакующих объектов, содержащий текстовое поле вывода вспомогательной информации об объекте.

Кнопка «Добавить» позволяет добавлять данные об объектах в список атакующих объектов.

Кнопка «Удалить» позволяет удалить координаты объекта из общего списка.

Кнопка «Сохранить изменения» сохраняет добавленные координаты атакующего объекта.

Дифференциальная игра

Меню

Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами

Сохранить начальные данные

Загрузить начальные данные

Исходные данные

Эпсилон 1

Первый игрок

Второй игрок

Пункты защиты

Результаты

Исходные данные первого игрока

Список атакующих объектов

Начальная точка первого игрока (k_0)

X =

Y =

Z =

Начальная скорость (M_{k0})

Ускорение (M_k)

Время игры (t_f)

Добавить

Удалить

Сохранить изменения

Конечная точка первого игрока (k_f)

Координата

X =

Y =

Z =

Особенность точки (B_k)

Особенность точки (B_{k2})

Рис. 8. Окно ввода данных первого игрока для игровой задачи
«Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами»

Окно ввода данных второго игрока содержит информацию о списке защищаемых объектов (рис. 9):

- дальность действия объекта;
- особенности точки α ;
- начальная скорость объекта;
- начальное ускорение объекта.

Так же, как и в окне ввода данных первого игрока, здесь присутствуют кнопки «добавить», «удалить», «сохранить изменения», которые выполняют те же функции, как и в предыдущем окне.

Следует заметить, что когда выполняется алгоритм игровой задачи «Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами», то второй игрок неподвижен, поэтому задавать для него ускорение не имеет смысла. Для него достаточно задать дальность действия пункта защиты. Окно ввода данных выглядит следующим образом (рис. 10):

Окно «Пункты защиты второго игрока» состоит из списка защищаемых объектов, который, как и список атакующих объектов, состоит из текстового поля вывода вспомогательной информации об объектах, а это прежде всего координаты точек расположения второго игрока, которые можно также задавать кнопкой «Координата», при этом возможно изменять координаты x , y , z (рис. 11). Таким образом, задается начальная позиция объекта, особенности точек α и β – последовательности действительных чисел, которые определяются физико-географическими или иными особенностями пространства взаимодействия объектов.

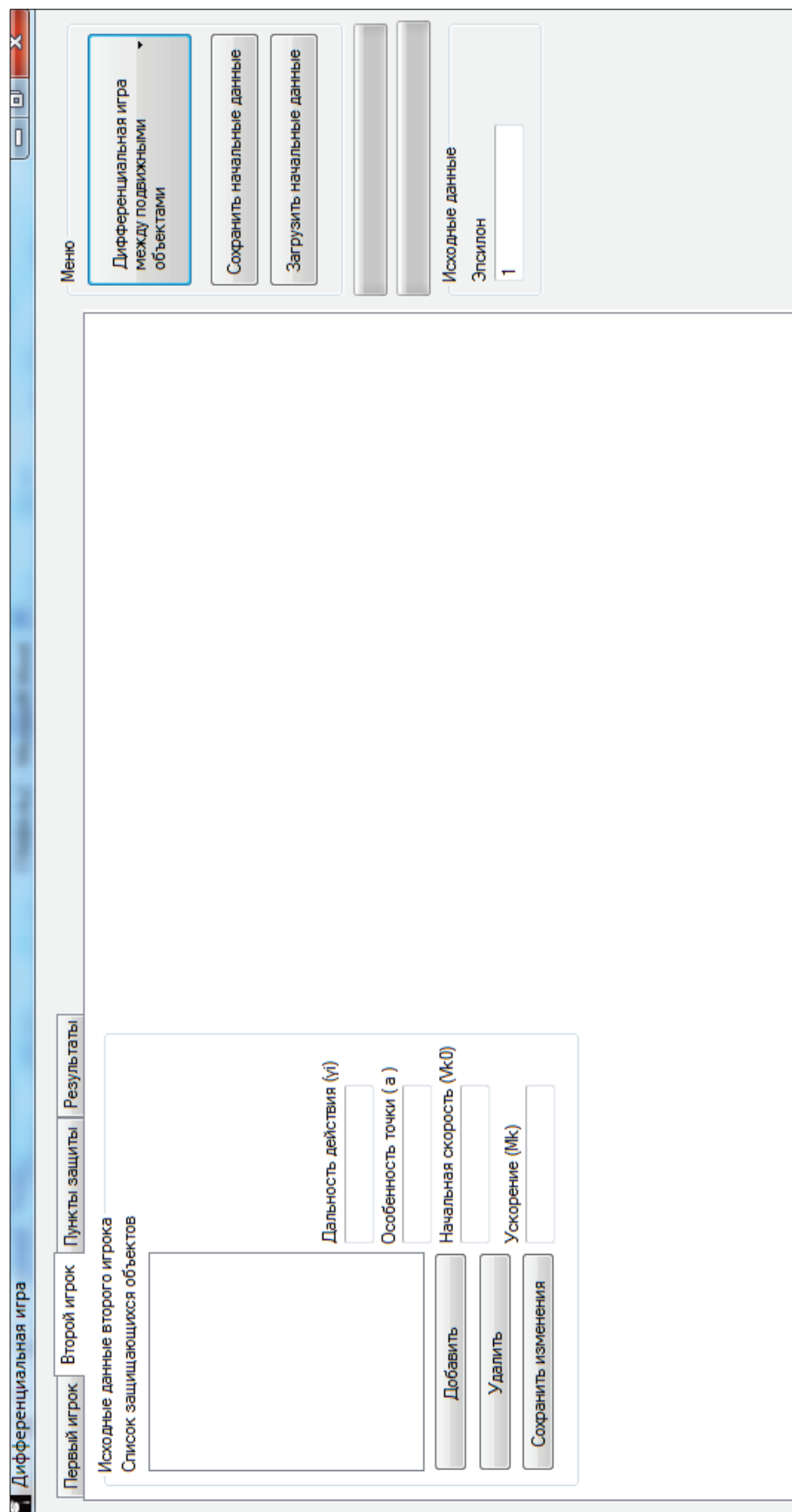


Рис. 9. Окно ввода данных второго игрока для игровой задачи
«Дифференциальная игра между подвижными объектами»

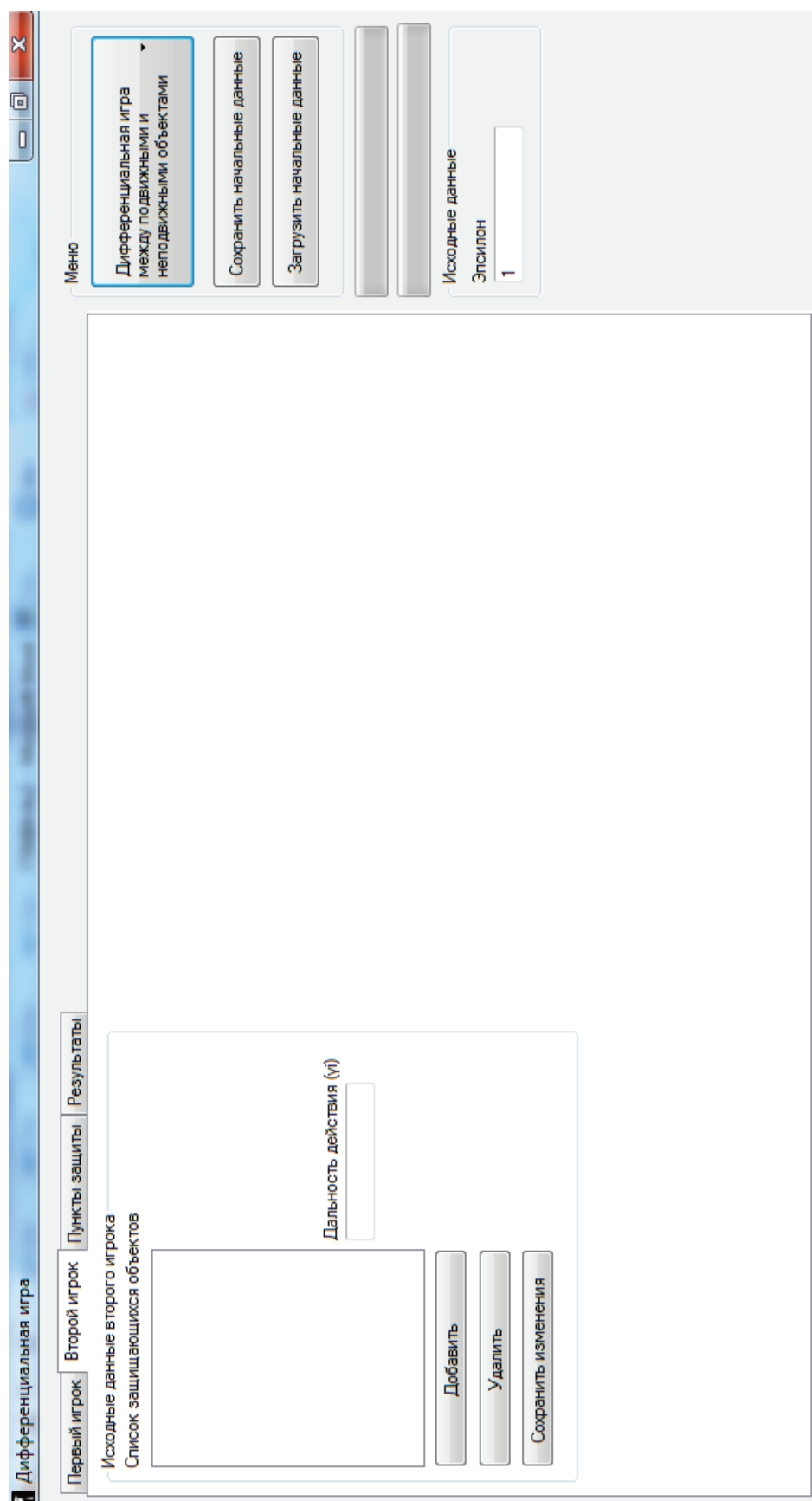


Рис. 10. Окно ввода данных второго игрока для игровой задачи «Дифференциальная игра между подвижными и неподвижными объектами»

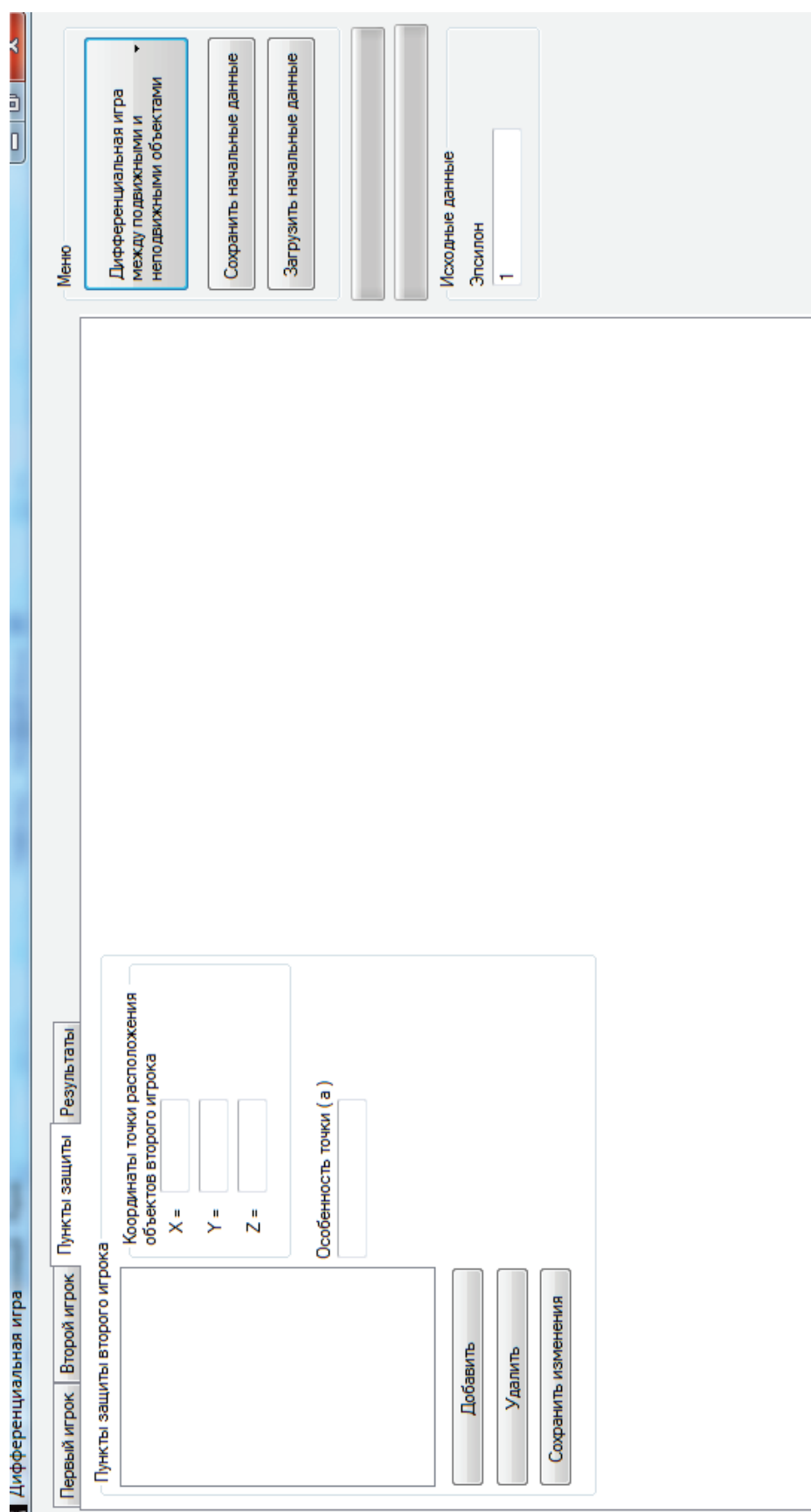


Рис. 11. Окно «Пункты защиты второго игрока»

Окно программы «Результаты вычислений» служит для вывода расчетов искомых параметров (рис. 12).

Вкладка «Игровое поле» позволяет отображать графически результаты проведённых исследований (рис. 13).

После нажатия на кнопку «Рассчитать» в меню программы запустится игровое поле, на нем будет изображен оптимальный вариант перемещения объектов, т. е. графическая интерпретация решения задачи. Так как перемещение объектов может находиться в любом месте игрового поля, чтобы сэкономить место и не загромождать игровое поле рисунком, все объекты находятся в левом верхнем углу игрового поля. Первоначально показан центр окна (рис. 13), поэтому для того, чтобы увидеть рисунок полностью, нужно колесиком мыши уменьшить масштаб и, нажав левую кнопку мыши, можно перемещать изображение влево, вправо, вверх и вниз (рис. 14).

Внизу игрового поля находится легенда с указанием цвета каждого объекта игры.

6. Инструкция пользователя

Запуск программы. Программу можно запустить на выполнение одним из следующих способов:

- выбрав в проводнике программы выполняемый файл DifferentialGame.exe, запустить его двойным нажатием левой клавиши мыши;
- наведя указатель мыши на ярлык программы, расположенный на рабочем столе, и дважды нажав левую клавишу мыши.



Рис. 12. Результаты вычислений

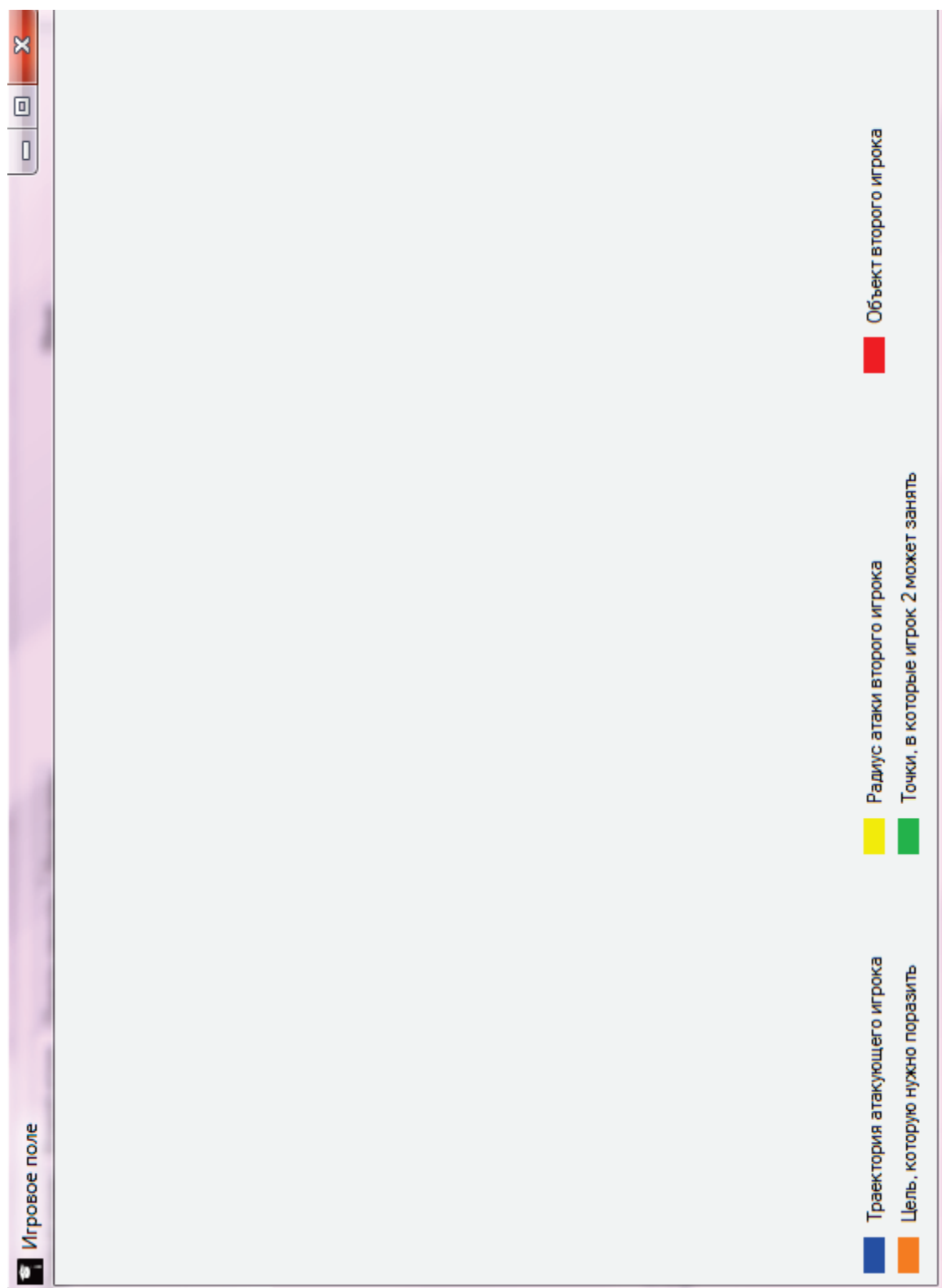


Рис. 13. Игровое поле программы

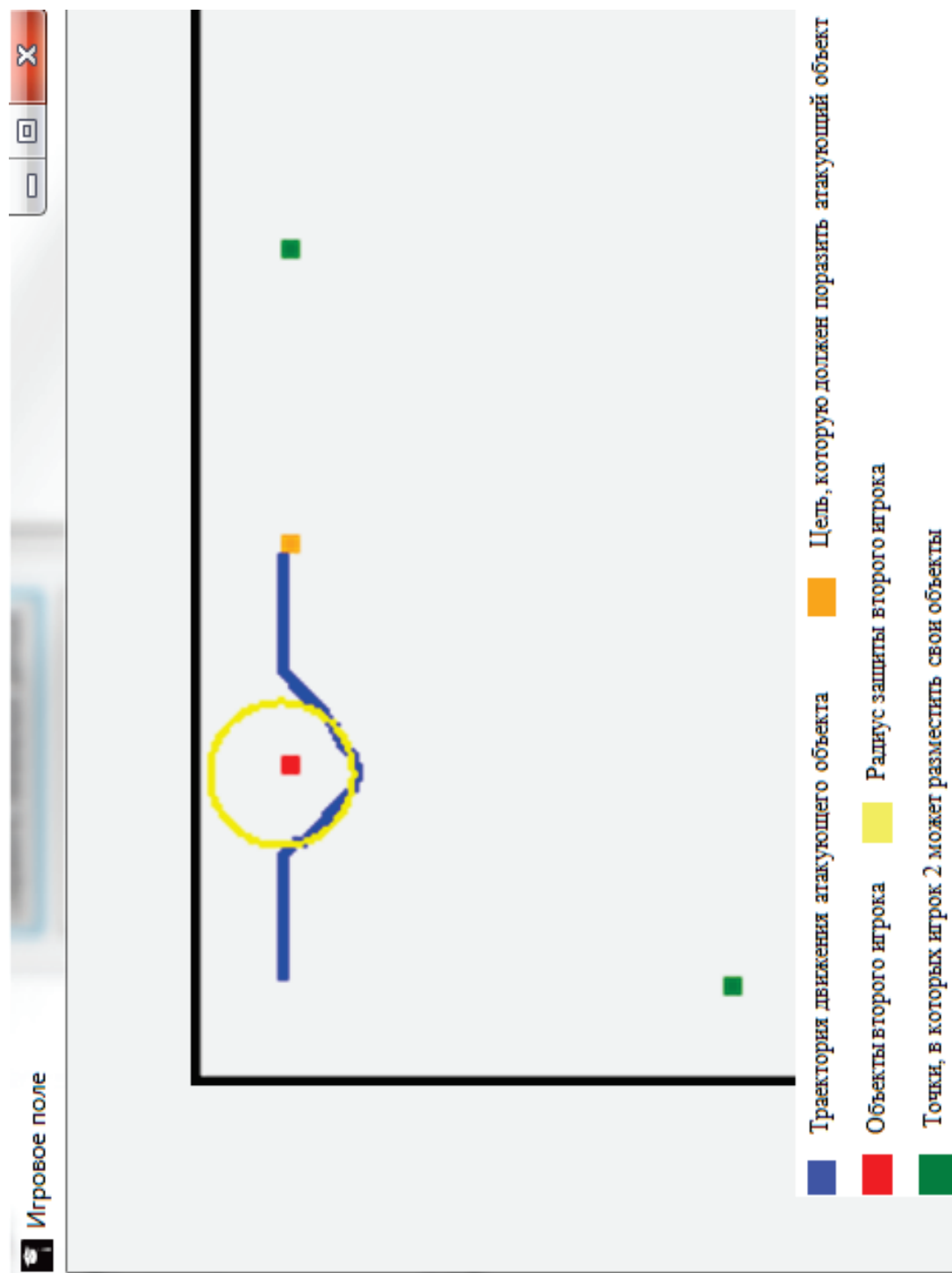


Рис. 14. Игровое поле с вычисленными данными

После этого произойдет загрузка программы. Пользователь должен увидеть следующий интерфейс программы (рис. 4).

После загрузки программы откроется окно ввода параметров (рис. 5), где необходимо задать основные параметры игроков, описанные в пункте 5. Затем из выплывающего окна кнопкой «Выбор алгоритма» нужно выбрать дифференциальную игру, алгоритм которой будет выполнять программа. После нажатия кнопки «Рассчитать» осуществляется переход в окно расчетов (рис. 12).

На рис. 15 показано, как формируется отчет о результатах работы программы.

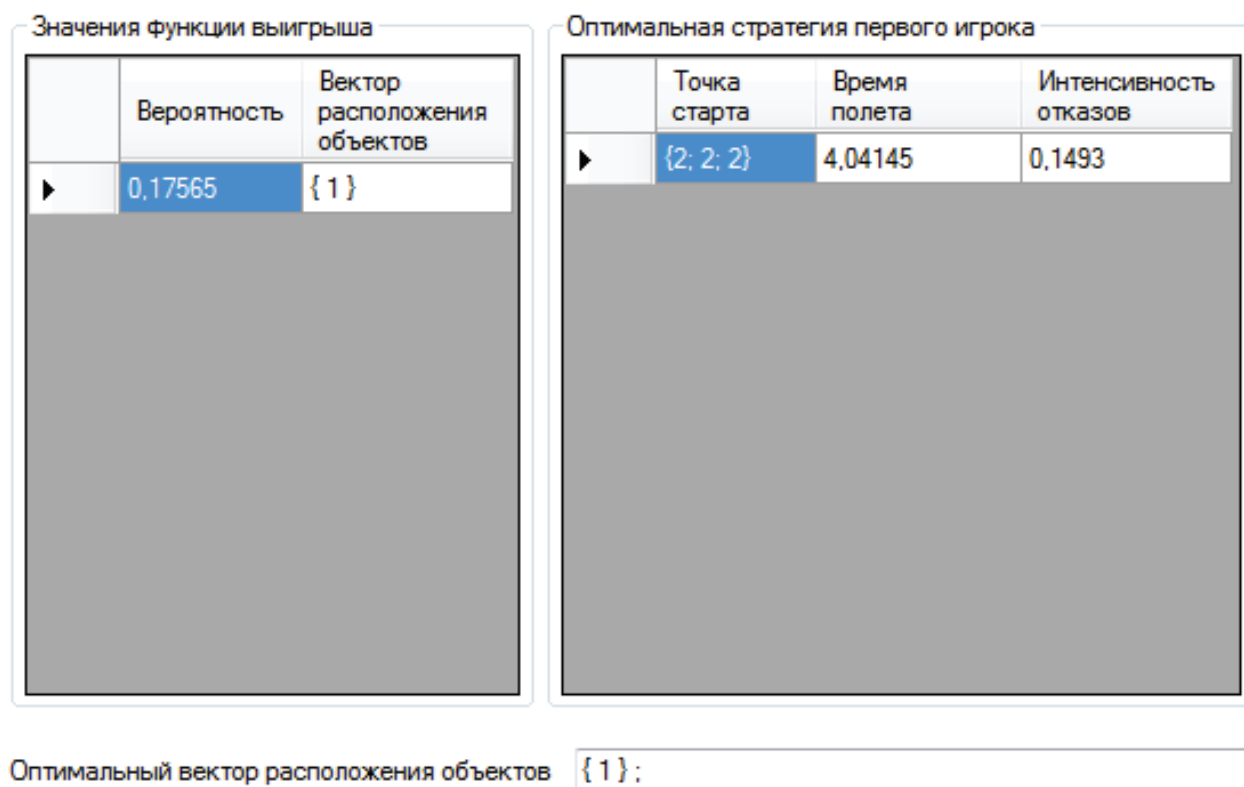


Рис.15. Результаты расчета программы

Из приведенного фрагмента программы видно, что при приближении подвижного объекта к неподвижному на шаг дискретизации противоборствующие между собой системы начинают воздействовать друг на друга, при этом интенсивность отказов компонентов системы противника начинает увеличиваться.

Результатом вычислений программы является максимальное значение функции выигрыша K_j , т. е. определение оптимальной пространственно-временной стратегии резервирования подвижного объекта. Указываются значение вероятности безотказной работы противоборствующего подвижного объекта, координаты вектора расположения объекта.

Затем идут основные вычисления оптимальной стратегии первого игрока:

- номер объекта;
- координаты объекта;
- время полета атакующего объекта;
- интенсивность отказов подвижного объекта.

Следует еще раз подчеркнуть, что все вычисления проводятся на каждом j -м шаге до тех пор, пока не произойдет максимальное приближение подвижного объекта к неподвижному на заданное расстояние, т. е. вычисление максимального значения функции выигрыша.

Для повышения надежности и эффективности проведения исследования, правильной интерпретации результатов, а также чтобы не загромождать окно программы результатами вычислений, выходные данные программы задаются для шага, на котором определена оптимальная стратегия подвижного объекта.

Настройка параметров моделируемой системы

В ходе экспериментов изменять значения параметров можно как с помощью вызова окна ввода параметров, так и непосредственно на панели изменения основных параметров системы главного окна программы.

Для вычисления параметров, обеспечивающих оптимальное решение задачи, необходимо задать ряд параметров игры:

- координаты атакующего объекта;
- интенсивность отказов подвижного объекта;
- начальная скорость объекта;
- начальное ускорение объекта;
- время игры t_f ;
- координаты защищаемых объектов;
- количество точек защиты;
- точность измерения траектории подвижного объекта ε .

Данный программный комплекс позволяет рассчитывать интенсивности отказов технической системы противника, вероятности безотказной работы противоборствующего подвижного объекта, а также позволяет найти оптимальную пространственно-временную стратегию резервирования подвижного объекта.

Программа зарегистрирована в Федеральном институте промышленной собственности, имеется свидетельство о Государственной регистрации программы для ЭВМ №2014617425 от 22. 07. 2014 г.

Научное издание

Потапов Виктор Ильич

**ПРОТИВОБОРСТВО ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ:
МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ**

Монография

Редактор *Т. А. Москвитина*

Компьютерная верстка *О. Г. Белименко*

Подписано в печать 26.05.15. Формат 60×84¹/₁₆. Отпечатано на дупликаторе.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,5.

Тираж 500 экз. Заказ 320.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12.

Типография ОмГТУ.